DOUGLAS RICARDO SLAUGHTER NYIMI

COMPUTABILIDADE E LIMITES DA MATEMÁTICA DAS TEORIAS FÍSICAS: APLICAÇÕES EM SISTEMAS ELÉTRICOS DE POTÊNCIA

São Paulo
2011

DOUGLAS RICARDO SLAUGHTER NYIMI

COMPUTABILIDADE E LIMITES DA MATEMÁTICA DAS TEORIAS FÍSICAS: APLICAÇÕES EM SISTEMAS ELÉTRICOS DE POTÊNCIA

Tese apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para a obtenção do título de Doutor em Engenharia.

Área de Concentração:
Sistemas de Potência

Orientador: Prof. Livre-Docente
José Aquiles Baesso Grimoni

São Paulo
2011

FICHA CATALOGRÁFICA

Slaughter, Douglas Ricardo Nyimi
Computabilidade e limites da matemática das teorias físicas: aplicações em sistemas elétricos de potência / D.R.N. Slaughter -- São Paulo, 2011.
160 p.

Tese (Doutorado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Energia e Automação Elétricas.

1.Sistemas elétricos de potência 2.Sistemas de controle 3.Teoria da computação 4.Teoria do caos 5.Física matemática 6.Matemática da computação I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de Energia e Automação Elétricas II.t.

DEDICATÓRIA

A Jennifer
A Neide

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. José Aquiles Baesso Grimoni pela amizade, convivência, auxílio, confiança e orientação dedicada.

Ao Prof. Dr. Gildo Magalhães pelas sugestões, boa vontade, conversas e por uma recomendação crucial: “comece pelo meio”.

Ao Prof. Dr. João José Neto pelas conversas esclarecedoras sobre computabilidade, orientações com relação à importância do formalismo matemático, pelo curso de fundamentos da computação e por sua detalhada avaliação de uma versão da tese. Foram contribuições decisivas.

Ao Prof. Dr. Lineu Belico dos Reis pela ajuda, esclarecimento de dúvidas e avaliação de versões preliminares do trabalho.

Ao Prof. Dr. Luiz Barco pelas sugestões e sábias palavras com relação à vida.

Ao Prof. Dr. Osvaldo Pessoa Jr. e ao grupo REDUX (Fábio Gatti, Fábio Leite, Luiz Rigolin, Nelson Bejarano e Yara Kulaif). As apresentações e debates do grupo foram fundamentais para a estruturação desta tese.

Ao Prof. Dr. Walter Kaiser pela boa vontade e colaboração. Graças a sua ajuda, este doutorado foi possível.

A Jennifer, minha noiva, meu Sol de todos os dias, o Norte de minha vida.

A Neide, minha mãe, por seu amor e respaldo incondicionais durante toda minha vida.

A Christian, meu irmão e companheiro de viagem, pela convivência, conversas sobre todos os assuntos e ajuda na busca de sentidos para a vida.

Aos meus tios Dirce, Helena e Edson pelo interesse e incentivo.

Ao grande amigo Alexandre Coutinho Lisboa pelas estimulantes conversas e sua contagiante paixão pela busca do saber.

À Escola Politécnica e à Universidade de São Paulo por proporcionar a oportunidade de realizar um doutorado de alto nível de forma gratuita.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pela bolsa de estudos que proporcionou as condições financeiras para a elaboração deste trabalho com tranquilidade.

"There are more things in heaven and earth, Horatio,
Than are dreamt of in your philosophy"[1]
Hamlet

"To a man with a hammer, everything looks like a nail"
Mark Twain

"Eu prefiro ser essa metamorfose ambulante

Do que ter aquela velha opinião formada sobre tudo"

Raul Seixas

[1] Esta frase é dita por Hamlet a Horácio, no ato I, cena V, da peça Hamlet de William Shakespeare (1564-1616). A expressão '*your philosophy*' se refere à filosofia natural (que, a grosso modo, corresponde às ciências naturais atuais) das quais Horácio era um estudioso.

RESUMO

Apesar dos modelos usados em engenharia serem, em sua maioria, reconhecidamente aproximados, acredita-se que a matemática usada na física e nos próprios modelos é infinitamente precisa e que tais teorias físicas poderiam prever completamente qualquer evento relacionado às variáveis equacionadas. No limite, seria possível prever o estado do "universo" em qualquer instante, crença esta chamada de determinismo. Claro está que essa pretensão é apenas de princípio, sendo impossível na prática. No entanto, pesquisas sobre os fundamentos da matemática e outras teorias matemáticas desenvolvidas no século XX sugerem que a matemática (e, consequentemente, a física) teria certos limites inerentes. A análise feita nesta tese fundamenta seus argumentos na Teoria das Funções Recursivas e Computabilidade Efetiva e na Teoria do Caos Determinístico. O objetivo principal é tratar de apurar a existência de limites inerentes e como tais limites se aplicariam aos sistemas elétricos de potência (mais especificamente nos tópicos fluxo de carga, transitórios eletromecânicos, transitórios eletromagnéticos e eletrônica de potência) e à engenharia de controle.

Palavras-chave: Computabilidade, Caos, Matemática, Física, Modelos matemáticos, Sistemas elétricos de potência, Determinismo, Laplace, Limitações.

ABSTRACT

Although the models used in engineering are, in most cases, admittedly approximated, it is believed that the Mathematics used in Physics and in these models, is infinitely precise and that such physical theories could fully predict any event related to variables in equations. In the limit, it would be possible to predict the state of the "universe" at any moment, this belief is called determinism. It is clear that this claim is only in principle, impossible in practice. However, research on the foundations of Mathematics and other mathematical theories developed in the 20th century suggest that the Mathematics (and hence Physics) would have certain inherent limitations. The analysis made in this thesis has the arguments based on the Theory of Recursive Functions and Effective Computability and the Theory of Deterministic Chaos. The main objective is to find out the existence of inherent limits and how these limits could be applied to electric power systems (more specifically to the topics load flow, electromechanical transient and electromagnetic transient and power electronics) and control engineering.

Keywords: Computability, Turing, Chaos, Mathematics, Physics, Mathematical models, Power electric systems, Determinism, Laplace, Limitations.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

DSCI	Dependência Sensitiva das Condições Iniciais
EDO	Equação Diferencial Ordinária
EDP	Equação Diferencial Parcial
EOM	Encyclopaedia of Mathematics
MDC	Máximo Divisor Comum
MT	Máquina de Turing
RPS	Regime Permanente Senoidal
SEP	Stanford Encyclopedia of Philosophy
UTM	Universal Turing Machine
ZFC	Teoria de conjuntos axiomatizada de **Z**ermelo-**F**raenkel acrescida do “axioma de escolha” (axiom of **C**hoice)

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Terá a matemática usada nas teorias físicas e nas ferramentas formais (cálculo) algum limite intrínseco?

Relacionado a isso, está a crença na possibilidade de caracterizar completamente os fenômenos pela matemática de uma ou mais teorias físicas. Esta é a crença na exatidão das descrições e na total previsibilidade de **qualquer** sistema físico como algo possível em princípio. Tal crença é, inclusive, um pressuposto de trabalho em engenharia de sistemas e controle. Será, afinal, esta crença justificável como princípio teórico?

O objetivo principal desta tese é, ao propor respostas a essas indagações, tratar de delinear as capacidades e limites das teorias e das ferramentas utilizadas em engenharia, contribuindo para o seu uso mais consciente e adequado. O delineamento de capacidades e limites também pode abrir novas possibilidades teóricas e oferecer, eventualmente, perspectivas e abordagens diferentes para resolver novos e antigos problemas.

As respostas obtidas serão aplicadas em alguns assuntos da área de sistemas elétricos de potência (mais especificamente nos tópicos fluxo de carga, transitórios eletromecânicos, transitórios eletromagnéticos e eletrônica de potência) e na discussão dos pressupostos de trabalho da engenharia de controle. As aplicações não devem ser, necessariamente, consideradas práticas. Elas têm, como principal finalidade, fornecer contextos concretos (sistemas elétricos de potência e engenharia de controle), que ilustrem e possibilitem análises sobre eventuais consequências práticas.

O objetivo secundário é dar, dentro do possível, um tratamento histórico e/ou filosófico das idéias e teorias envolvidas nas discussões empreendidas nesta tese.

O caminho feito por este trabalho é partir de uma análise da matemática “clássica” para, então, tecer considerações sobre as implicações desta análise no domínio da física, como uma ciência que usa a matemática. A análise fundamenta seus argumentos na Teoria das Funções Recursivas e Computabilidade Efetiva e na Teoria do Caos Determinístico. Estas duas teorias foram desenvolvidas no século XX, sendo que, a primeira, teve suas bases lançadas na década de 30 e, a segunda, se consolidou na década de 70.

O itinerário começa no capítulo 2, com a apresentação de noções básicas sobre a importantíssima teoria de conjuntos. Esta teoria traz conceitos, como o de cardinalidade, de conjuntos contáveis e incontáveis, que serão muito utilizados ao longo do trabalho e são de particular relevância para a compreensão dos capítulos 5 e 6. O capítulo 3 discute as equações diferenciais, já que as leis matemáticas da física são normalmente expressas por este formalismo matemático. No capítulo 4, são apresentados os aspectos fundamentais da Teoria do Caos Determinístico. O capítulo 5 e o capítulo 6 apresentam os conceitos mais importantes para as análises feitas por esta tese, em especial, os conceitos de máquina de Turing e de computabilidade, ambas fazem parte da Teoria das Funções Recursivas e Computabilidade Efetiva. O capítulo 7 pode ser considerado o principal deste trabalho. É nele que é feita a análise sobre a matemática aplicada usando o repertório conceitual desenvolvido nos capítulos que lhe precederam.

Com a intenção de ser rigoroso nas discussões, foi feito um grande esforço para dar um tratamento mais formal à matemática e tratar de distinguir a matemática da física.

1.1 PRINCIPAIS HIPÓTESES

Ao longo do trabalho são adotadas algumas hipóteses para estabelecer uma base para as discussões. A seguir, as principais hipóteses.

As teorias físicas expressas por equações diferenciais pressupõem a continuidade das grandezas equacionadas. Em outras palavras, uma grandeza qualquer (tempo, posição, velocidade, aceleração, massa, corrente, tensão, etc.) seria perfeitamente descrita e quantificada pelo contínuo ou conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$ ou o $\mathbb{R}^n$). Além disso, as funções são, normalmente, contínuas.

A correspondência de um número ou de uma função e seu correlato físico (uma grandeza, uma medida, uma taxa de variação de uma grandeza, uma "constante universal", uma solução de equação diferencial, etc.) seguirão a interpretação corrente.

Aqui, os argumentos lógicos e matemáticos considerados válidos são aqueles do que se convencionou chamar de lógica e matemática "clássicas" ou "standard". Elas são as normalmente usadas e ensinadas nos cursos universitários (inclusive nos de matemática). É importante ressaltar isto, pois a pesquisa da lógica e da matemática modernas criaram inúmeras outras lógicas e matemáticas, tornando mais difícil fazer afirmações absolutas ou totalmente categóricas, mesmo dentro de formalismos. As afirmações serão rigorosas apenas dentro de um certo contexto, neste caso, o contexto "clássico"[1]. Assim, as afirmações matemáticas (teoremas, conjecturas, teses, etc.) são rigorosamente válidas no domínio da matemática correspondente. Extensões à física não gozam desse rigor, pois, entre outros motivos, a linguagem de representação/descrição (a matemática) não é a própria "natureza" (a *physis*). "O mapa não é o território". Essa diferença está relacionada à distinção entre epistemologia e ontologia.

A epistemologia está ligada à forma de conhecer, à estruturação teórica e seus relativismos (a linguagem usada, o observador (naquilo que pode e lhe interessa observar), a parcialidade ligada à cultura e aos conhecimentos de uma época, etc.) e a ontologia está ligada à "coisa em si", ao próprio objeto[2].

Para este trabalho, isso significa distinguir a matemática de uma teoria física (e a própria teoria física) da natureza que esta ciência trata de descrever e/ou explicar.

1.2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Na literatura da área de sistemas elétricos de potência não foi encontrada nenhuma referência aos assuntos computabilidade, indecidibilidade ou incompletude formal.

Aparentemente, ainda não surgiu necessidade que impelisse a pesquisa desses assuntos em sistemas de potência especificamente. Talvez isso se deva ao fato de que, em sistemas de potência, a matemática é usada essencialmente como ferramenta, dando menor ênfase ao formalismo matemático que a fundamenta. Dessa forma, questionamentos mais básicos não são comuns. Isso está em evidente contraste com o tema computabilidade e sua estreita ligação com os fundamentos da matemática e seu caráter eminentemente formal.

Com o intuito de buscar alguma base para as discussões, foram encontradas e estudadas algumas referências em física, que é uma área com grande afinidade com a engenharia. Provavelmente, por ser a física uma disciplina mais teórica e dependente do formalismo matemático que estudos envolvendo a noção de computabilidade foram feitos.

[1] O termo "clássico" (ou "standard") será explicado na seção 2.1.

[2] Existiram muitas teorias que trataram de descrever e/ou explicar a natureza e que foram alteradas ou simplesmente abandonadas ao longo da história. Um exemplo foi a mecânica newtoniana, que teve que ser abandonada como descrição/explicação completa e fiel da natureza, por causa do surgimento de novas teorias e fatos que ela era incapaz de abraçar. Qualquer teoria pode ter a mesma sorte. Mesmo teorias bem-sucedidas costumam apresentar problemas e novos fatos sempre podem surgir e colocá-las em xeque.

Nos trabalhos consultados (que são os mais conhecidos e citados), dois grupos principais podem ser discernidos: o grupo de abordagem matemática e o grupo de abordagem física.

O grupo de abordagem matemática discute, essencialmente, apenas a computabilidade da matemática usada em física, não entrando no mérito de como essa matemática está ligada aos fenômenos físicos. É uma abordagem rigorosa e não empreende debates metafísicos. Entre os trabalhos que adotam esta abordagem podem-se citar Pour-El e Richards (1979, 1981), Costa e Doria (1991) e Costa, Doria e Furtado do Amaral (1991).

O grupo de abordagem física tende a misturar epistemologia (forma de conhecer através da matemática) com ontologia (objeto de estudo representado pelo mundo físico), atribuindo propriedades físicas à matemática ou vice-versa. São menos rigorosos e entram em discussões metafísicas. Em SEP (2010, verbete "Computation in physical systems"), a postura filosófica adotada por diversos desses autores é chamada de *pancomputacionalismo ôntico*, que propõe que o próprio "universo" seria um sistema computacional. Os defensores do *pancomputacionalismo ôntico* pareceriam mais motivados pelo desejo de que os modelos físicos sejam exatos e completos do que saber se são corretos. Assim, tratam de impor propriedades de certa teoria matemática (a teoria da computação em substituição à análise ou matemática do contínuo) à natureza, com a intenção precípua de resolver alguns problemas causados pelo uso da matemática contínua, desconsiderando (ou deixando em segundo plano) se tal teoria é adequada, ou não, aos fatos. Os trabalhos que se enquadram nessa abordagem são Fredkin e Toffoli (1982), Feynman (1982a), Geroch e Hartley (1985), Deutsch (1985), entre outros.

Hawking (2002) aponta para limitações que a ciência física pode enfrentar tendo em vista os teoremas de incompletude de Gödel. No entanto, não explicita claramente como tais teoremas seriam limitantes e, assim como o grupo de abordagem física, Hawking tende a confundir incompletude formal, com incompletude física. Jaki (2004) critica Hawking, e os físicos em geral, pela sua demora em questionar o alcance das teorias físicas (quando o fazem), mesmo muitos anos após o surgimento dos teoremas de Gödel[3].

Penrose (1999) e Earman (1986) discutem a computabilidade da matemática usada em física de forma rigorosa, tendo consciência da diferença entre a matemática e a física. As considerações do ponto de vista da física, no entanto, são genéricas e não fornecem exemplos mais específicos ou concretos.

[3] Por exemplo, o físico alemão Albert Einstein (1879-1955) foi amigo de Kurt Gödel, com quem conviveu, por muitos anos, no Instituto de Estudos Avançados de Princeton, e, ao que tudo indica, nunca relacionou a física aos teoremas de incompletude.

Earman (1986) também é uma obra destacada na literatura que trata do determinismo, onde são feitas discussões aprofundadas a respeito deste tema. Neste livro, relaciona-se determinismo e computabilidade, mas, apesar de fazer uma avaliação ampla e rigorosa, o autor não percebe (ou, pelo menos, não expõe) um aspecto fundamental dessa relação: a possibilidade de cálculo de pontos particulares em funções contínuas.

Outras referências da relação entre física e computabilidade foram consultadas, mas seus conteúdos eram, basicamente, variantes daquelas já apresentadas.

2 NOÇÕES SOBRE A TEORIA DE CONJUNTOS

O propósito deste capítulo é introduzir alguns aspectos da teoria de conjuntos, que são importantes para a formalização e compreensão dos argumentos que serão usados neste trabalho. Particularmente, os conjuntos infinitos são relevantes para a compreensão das questões sobre computabilidade.

2.1 A IMPORTÂNCIA DA TEORIA DE CONJUNTOS PARA A MATEMÁTICA

Alguns historiadores, como Eves (2004), afirmam que houveram três grandes crises nos fundamentos[4] da matemática:

a) A descoberta das medidas incomensuráveis;
b) O aparecimento de paradoxos no cálculo;
c) A descoberta de paradoxos na teoria de conjuntos.

A primeira crise foi deflagrada no século V a. C. com a descoberta da existência dos números irracionais, como, por exemplo, a medida da diagonal de um quadrado de lado unitário ($\sqrt{2}$). Tal descoberta é atribuída a Hipaso de Metaponto (viveu no século V a. C.).

Naquela época, a filosofia pitagórica era o paradigma matemático e científico. Segundo Pessoa Jr. (2009), a filosofia pitagórica afirmava, entre outras coisas, que as relações científicas eram expressas por números naturais ou números racionais. Acreditava-se, por exemplo, que qualquer medida geométrica, m, seria comensurável, no sentido de que ela sempre teria a forma $m=ku$, onde k é um número racional e u uma unidade básica inteira. Essa era uma crença advinda da mesma teoria pitagórica das grandezas, que postulava que qualquer medida de mesma espécie devia ser comensurável (EVES, 2004).

Com a descoberta dos números irracionais, ou medidas incomensuráveis (por não serem múltiplas racionais de uma unidade básica de medida inteira), o postulado pitagórico foi contrariado e a crise se instalou. A superação desta crise ocorreu por volta de 370 a. C. pelas

[4] A palavra "fundamentos" justifica-se quando a matemática é considerada uma ciência dedutiva. Acredita-se que a tradição dedutiva da matemática venha da Grécia, a partir de Tales de Mileto (~625 a. C.– ~546 a. C.) e Pitágoras de Samos (~570 a. C.– ~495 a. C.), no século VI a. C.

mãos do matemático Eudoxo de Cnido (~410 a. C.– ~355 a. C.), através de uma revisão da teoria das grandezas e proporções (EVES, 2004).

A segunda crise ocorreu no século XVIII pelo descuido nos fundamentos do cálculo diferencial e integral. O descuido resultou no aparecimento de paradoxos.

O cálculo resolveu muitos problemas da física, mas esse sucesso prático estava divorciado do rigor matemático. Naquele então, havia uma preocupação muito maior em **aplicar um método** do que **garantir logicamente sua validade**. Segundo Eves (2004, p. 673-674): “em vez de demonstrações para justificar resultados, chegou-se ao ponto de usar resultados para justificar demonstrações”. Assim, paradoxos foram surgindo naturalmente pela falta de rigor[5].

Desde a época da criação do cálculo até o final do século XVIII, a análise era o estudo de processos infinitos que tratava de grandezas contínuas (BOYER, 1996), mas que estava desvinculada da aritmética, que era um ramo logicamente mais rigoroso.

Esta crise começou a ser resolvida, no começo do século XIX, justamente, com a aritmetização da análise, iniciada por Augustin Louis Cauchy (1789-1857)[6], que substituiu o vago método dos infinitésimos pelo rigoroso método dos limites, e finalizada por Karl Weierstrass (1815-1897) e seus seguidores, no final do mesmo século (EVES, 2004).

A terceira crise é a que mais interessa a este trabalho. Ela ocorreu quase que simultaneamente com a resolução da crise anterior e também está ligada à existência de paradoxos em uma teoria que revolucionou todo o “edifício” matemático. A teoria de conjuntos, que surgiu no último quarto do século XIX, reestruturou praticamente toda a matemática e influenciou profundamente os desenvolvimentos posteriores.

A teoria de conjuntos teve um impacto tão grande que, além de reestruturar quase todos os campos já existentes, abriu novos e foi decisiva para os grandes progressos da matemática e da lógica no século XX. Segundo SEP (2007):

> Set theory is one of the greatest achievements of modern mathematics. With few significant exceptions all mathematical concepts, methods, and results admit of representation within axiomatic set theory. Thus set theory has served quite a unique role systematizing (almost) the whole of modern mathematics, and approaching in a unified form all basic questions about admissible mathematical arguments […] (SEP, 2007, verbete “The early development of set theory”)

Os paradoxos foram percebidos logo (até Cantor descobriu alguns) e isso ameaçou a teoria. Por outro lado, a própria crise na teoria de conjuntos também deu grande ímpeto ao

[5] Ao longo da história da matemática, são diversos os exemplos em que a falta de rigor (expressa por conceitos e questões ambíguos, mal definidos, mal fundamentados, etc.) resulta em problemas e paradoxos.

[6] A época de Cauchy foi marcada pelo significativo aumento do rigor na matemática. Uma anedota conta que quando Cauchy divulgou seu primeiro artigo sobre a convergência de séries, Laplace correu para verificar se não tinha usado alguma série divergente em sua obra *Mécanique céleste* (BOYER, 1996).

desenvolvimento matemático. As tentativas de resolução da crise deram ensejo, inclusive, ao aparecimento de diversas novas matemáticas e de novas lógicas como, por exemplo, a matemática e a lógica intuicionistas[7]. A crise, ainda hoje, não foi completamente resolvida, mas o fato é que ela não derrubou a teoria (que, de uma forma ou de outra, teve seus problemas contornados). Pelo contrário, contribui para a extraordinária expansão da matemática no século XX.

E qual é exatamente a relevância da teoria de conjuntos para este trabalho?

Além do estudo sobre conjuntos infinitos (importantes para as questões de computabilidade), é através da teoria de conjuntos que quase a totalidade dos tópicos de matemática ensinados e usados em engenharia, como funções, cálculo diferencial e integral, álgebra linear, etc., são expressos e estruturados.

Neste trabalho, a matemática normalmente ensinada em cursos de graduação e usada pelos engenheiros será denominada matemática "clássica" ou "standard".

Segundo Costa e Doria (1991), a totalidade da matemática "clássica" ou "standard" pode ser formalizada dentro da teoria de conjuntos axiomatizada de Zermelo-Fraenkel acrescida do "axioma de escolha" (ZFC) e uma linguagem de primeira ordem.

A matemática de toda a física moderna é "clássica" (informação verbal)[8].

2.2 ALGUNS MARCOS HISTÓRICOS

A criação da teoria de conjuntos costuma ser atribuída a Georg Cantor (1845-1918), no entanto não seria justo dar todo o crédito da criação a ele, já que, apesar de suas contribuições originais e decisivas, foi, também, um catalisador de conhecimentos matemáticos acumulados ao longo da história que o antecedeu (inclusive, existem evidências de que foi antecipado por Bolzano em algumas idéias). Logo, é possível dizer que a teoria de conjuntos foi também resultado de um longo processo, cujo início se perde na bruma dos tempos, e seu desenrolar conhecido teve a contribuição de muitas outras pessoas.

[7] A lógica intuicionista, entre outras diferenças com relação à lógica "clássica", não aceita as demonstrações pelo método indireto (ou por absurdo), pois questiona a universalidade do princípio do terceiro excluído. Uma curiosidade: acredita-se que a primeira demonstração por absurdo foi feita por Euclides para demonstrar a infinidade dos números primos.

[8] Afirmação feita pelo professor Newton Carneiro Affonso da Costa em colóquio realizado no Departamento de Filosofia da FFLCH-USP, São Paulo, em 10 de setembro de 2009.

Com o intuito de ajudar na compreensão do assunto, serão apresentados alguns marcos no desenvolvimento da teoria de conjuntos.

Um dos aspectos mais importantes da moderna teoria de conjuntos é a sua abordagem sobre as propriedades de coleções infinitas. A noção de infinito também tem uma longa história na matemática, na ciência e na filosofia (PESSOA Jr., 2009).

Um marco inicial na discussão sobre o infinito poderiam ser os paradoxos de Zenão de Eléia (~490 a. C.– ~430 a. C.), que talvez tenha sido o primeiro a formular questões sobre infinidades de uma maneira mais formal, como, por exemplo, no paradoxo da corrida entre Aquiles e a tartaruga[9].

Aristóteles de Estagira (384 a. C.– 322 a. C.) discutiu os paradoxos de Zenão e foi importante para o desenvolvimento posterior da matemática em geral (acredita-se, por exemplo, que diversas de suas idéias serviram de referência para Euclides de Alexandria (~325 a. C.– ~265 a. C.), autor de "*Os Elementos*", um dos livros mais influentes de todos os tempos) e, particularmente, dos estudos matemáticos formais sobre o que seria o infinito. A filosofia de Aristóteles teve grande influência no pensamento científico ocidental e, de certa forma, atrasou as reflexões sobre o infinito ao afirmar que existiria apenas o "infinito potencial", não existindo o "infinito atual". Com essa afirmação, Aristóteles colocou obstáculos para a discussão científica do infinito, pois, em certo sentido, ele disse que o infinito era algo que não podia ser investigado.

Já na modernidade, outro marco importante foram os passos dados por Galileu Galilei (1564-1642), crítico ferrenho da filosofia aristotélica. Em seu livro *Duas novas ciências*[10], discute um dos aspectos das infinidades que teve impactos no desenvolvimento da teoria de conjuntos, ao perceber a possibilidade de bijeção entre os números naturais (n) e seus quadrados (n^2). Apesar da relevante reflexão, errou nas conclusões. Entre suas conclusões equivocadas está a de que não se pode comparar tamanhos quando se examinam conjuntos infinitos. Nas próprias palavras de Galileu

> [...] **os atributos de maior, menor e igual não se aplicam aos infinitos**, mas apenas a quantidades finitas. Desse modo, quando o Sr. Simplício me propõe linhas desiguais e me pergunta como pode acontecer que nas maiores não existem mais pontos que nas menores, respondo-lhe que não existem nem mais, nem menos, nem outros tantos, mas infinitos em cada uma. (GALILEI, 1988, p. 33-34, negrito nosso)

---

[9] Zenão propôs diversos paradoxos semelhantes, os quais foram resolvidos muito tempo depois. Estes paradoxos podem ser enquadrados, hoje, como um problema de somatória infinita convergente: uma adição com infinitas parcelas, mas cuja soma é finita e única.

[10] O título original, em italiano, é *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* e foi publicado em 1638 pelo holandês Louis Elzevier. Este livro foi fundamental para configurar a Física Clássica.

Essas conclusões são compreensíveis, pois as propriedades das coleções infinitas fogem às percepções humanas cotidianas. Tanto que os grandes avanços para a formalização da teoria de conjuntos ocorreram apenas no século XIX, uma época em que, nas mais diversas áreas, houve um processo de crescente abstração, que se deu por um afastamento em relação às percepções "intuitivas"[11] e uma aproximação em relação às construções puramente "mentais"[12]. Esse afastamento da realidade sensível foi fundamental não apenas para que a teoria de conjuntos nascesse, mas para que a matemática em geral pudesse evoluir. Tanto é assim que, do ponto de vista da teoria de conjuntos, as figuras que fizeram as contribuições mais destacadas são todas do século XIX: Bernhard Bolzano (1781-1848), Bernhard Riemann (1826-1866), Richard Dedekind (1831-1916) e, claro, Georg Cantor.

Bolzano mostrou muitas propriedades importantes dos conjuntos infinitos e adiantou alguns resultados, mas seu trabalho, apesar de pioneiro, foi divulgado tardiamente, ficando à margem do *main-stream* matemático e pouco contribuindo para os desenvolvimentos (às vezes repetidos) ocorridos no final do século XIX (EVES, 2004). Por exemplo, Bolzano percebeu que era possível fazer bijeções entre um conjunto infinito e um subconjunto próprio seu (desde que infinito também). Há indicações que ele teria percebido, por volta de 1840, que a infinidade do $\mathbb{R}$ (conjunto dos números reais) era de um tipo diferente da infinidade do $\mathbb{Z}$ (conjunto dos números inteiros) (BOYER, 1996 e EVES, 2004).

Riemann foi um matemático excepcional que, apesar de sua curta vida, fez grandes aportes em muitos ramos da matemática. Seus estudos de séries trigonométricas ajudaram diretamente Cantor na elaboração da teoria de conjuntos.

Dedekind era amigo de Cantor e, tanto seus trabalhos como sua interação intelectual com Cantor, foram da maior importância para o surgimento formal da teoria de conjuntos. Dois resultados de Dedekind merecem destaque: sua definição precisa de conjunto infinito, que aparece em 1872, e a necessidade de uma relação biunívoca entre os elementos de dois conjuntos para que sejam equinumerosos ou equipotentes.

Com relação à definição precisa do que seria um conjunto infinito, onde seus antecessores viram paradoxo (como Galileu, que considerava que o todo era sempre maior que as partes

---

[11] A palavra intuição vem do latim *intuitionis* e significa "imagem refletida no espelho". Em todas as suas acepções, a palavra está associada a um conhecimento imediato, sem intermediários. Uma das acepções é: "a faculdade de perceber, discernir ou pressentir coisas, independentemente de raciocínio ou de análise". Intuição no texto quer dizer a percepção direta dada pelos sentidos e destituída de qualquer tipo de consideração.

[12] Avanços ocorridos no século XIX propiciaram a crescente abstração nos mais diversos segmentos. Foi um processo generalizado, ocorrendo em áreas que iam desde a matemática até as artes (na pintura, por exemplo, esse processo foi acentuado pelo surgimento da fotografia, que liberou os pintores do ofício de "retratistas da realidade" e lhes permitiu a exploração de aspectos mais subjetivos da observação do mundo, dando origem à pintura abstrata).

(axioma de Euclides)), Dedekind viu a própria essência de conjunto infinito (BOYER, 1996). Em terminologia contemporânea, a definição é a seguinte:

Definição 2.1: Um conjunto **S** é infinito se seus elementos podem ser postos em relação biunívoca com os elementos de um subconjunto próprio seu, **S’**.

Esta definição dá justamente o traço fundamental, a propriedade essencial que distingue um conjunto infinito de um conjunto finito. A necessidade da relação biunívoca entre elementos para que dois conjuntos sejam equinumerosos aparece na própria definição de conjunto infinito.

Georg Cantor foi um matemático genial e criativo, suas idéias originais e revolucionárias resultaram, de fato, na teoria de conjuntos propriamente dita. Muitas das descobertas de Dedekind já haviam sido percebidas por Cantor, porém este foi além daquele: a Cantor se atribui a percepção clara e a demonstração de que existem diferentes infinidades. Antes de Cantor, se reconhecia apenas um tipo de infinito, que era simbolizado por ∞. Ele demonstrou que o $\mathbb{R}$ era **maior** (no sentido de ter um número maior de elementos) que o $\mathbb{N}$ (conjunto dos números naturais). Também demonstrou que conjuntos que poderiam ser considerados maiores que o $\mathbb{N}$ tinham, na verdade, o mesmo número de elementos, como, por exemplo, o $\mathbb{Z}$ e o $\mathbb{Q}$ (conjunto dos números racionais), ambos tendo o $\mathbb{N}$ como subconjunto próprio[13].

Cantor criou uma teoria do infinito: a teoria dos números transfinitos, que conta, inclusive, com uma aritmética para estes números.

Seu trabalho foi tão revolucionário que causou polêmica entre seus contemporâneos. Apesar das demonstrações rigorosas, muitos não conseguiram aceitar seus resultados. Foi criticado duramente, inclusive, por matemáticos brilhantes, como o alemão Leopold Kronecker (1823-1891) e o francês Jules Henri Poincaré (1854-1912)[14]. Por outro lado, o grande matemático alemão David Hilbert (1862-1943) percebeu a relevância crucial da contribuição de Cantor e o apoiou. Sobre a obra de Cantor, Hilbert disse: “ninguém nos expulsará do paraíso que Cantor criou”.

De fato, a maior parte dos resultados apresentados neste capítulo foi obtida por Cantor.

[13] Definições e elaboração dos conceitos serão expostas mais adiante neste capítulo.
[14] Poincaré foi o pioneiro da Teoria do Caos Determinístico.

2.3 O QUE SÃO CONJUNTOS?

Um conjunto pode ser definido como uma **coleção** de "objetos". Os "objetos" que constituem um conjunto são chamados de **elementos** do conjunto.

Se **A** é um conjunto, então $a \in \mathbf{A}$ denota que a é um elemento **A**.

Os conjuntos são geralmente representados por chaves ({}), em cujo interior, dependendo da conveniência, se podem listar os elementos (**A**= $\{a, b, c\}$) ou indicar a propriedade que tais elementos compartilham (**A**= $\{a \in \mathbf{A}/\ a \geq 0\}$).

Quando um conjunto não possui elemento algum, tal conjunto é chamado de **conjunto vazio** e é representado por {} ou por $\emptyset$.

Por outro lado, conjuntos podem ter uma quantidade finita ou infinita de elementos. No primeiro caso, o conjunto é denominado finito e, no segundo caso, o conjunto é denominado infinito. Por exemplo:

A= $\{a, b, c\}$ é um exemplo de conjunto finito.

$\mathbb{N}$= {1, 2, 3,...} é o conjunto dos números naturais (pode incluir o zero). É um conjunto infinito.

Definição 2.2: Se todo elemento de um conjunto **B** é um elemento do conjunto **A**, então se diz que **B** é um **subconjunto** de **A** e se escreve $\mathbf{B} \subset \mathbf{A}$.

Definição 2.3: Se $\mathbf{B} \subset \mathbf{A}$ e $\emptyset \neq \mathbf{B} \neq \mathbf{A}$, então se diz que **B** é um **subconjunto próprio** de **A**.

Teorema 2.1: Se **A** é um conjunto qualquer, então $\emptyset \subset \mathbf{A}$.

Teorema 2.2: $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ se, e somente se, $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$ e $\mathbf{B} \subset \mathbf{A}$.

2.3.1 **Alguns conjuntos importantes**

A seguir são apresentados os conjuntos numéricos mais importantes para este trabalho e suas relações, seguindo as noções fornecidas na seção 2.2.

Como visto, ℕ= {1, 2, 3,...} é o conjunto dos números naturais. Entre seus subconjuntos próprios infinitos temos o conjunto dos números pares, o conjunto dos números ímpares, o conjunto dos números primos, etc.

ℤ (do alemão *zahlen*: saldar, pagar ou *zahl*: número)= {...,-2, -1, 0, 1, 2,...} é o conjunto dos números inteiros. É um conjunto infinito e o ℕ (conhecido também como conjunto dos inteiros positivos) é um de seus subconjuntos próprios.

Uma propriedade, tanto de ℕ como de ℤ**,** é que, dado dois números naturais ou inteiros quaisquer, sempre haverá uma quantidade finita de números naturais ou inteiros entre eles.

ℚ (de quociente) é o conjunto dos números racionais. São todos os números que podem ser representados na forma a/b (que é uma fração ou razão e, daí, o nome racional) onde a e b são números inteiros e $b \neq 0$.

Todo número racional tem expansão decimal finita ou periodicamente infinita (por exemplo: ⅓=0,333333...) (PENROSE, 1999). É um conjunto infinito e tem como subconjuntos próprios o ℤ e o ℕ.

Uma das propriedades do ℚ é que, dado dois números racionais quaisquer, sempre haverá uma quantidade infinita de números racionais entre eles.

O conjunto dos números irracionais é formado por números que não podem ser representados por razões (e daí seu nome). São exemplos de números irracionais o $\sqrt{2}$ (1,414213...), o $\sqrt{3}$ (1,732050...), o número áureo ($1+\sqrt{5}/2$), o número de Euler (e) (2,718281...), o π (3,141592...), etc. O conjunto dos números irracionais é um conjunto infinito.

ℝ é o conjunto dos números reais, que é a união do conjunto dos números racionais (ℚ) com o conjunto dos números irracionais.

Para ilustrar a relação entre os conjuntos numéricos, a figura 1 mostra o diagrama de Venn:

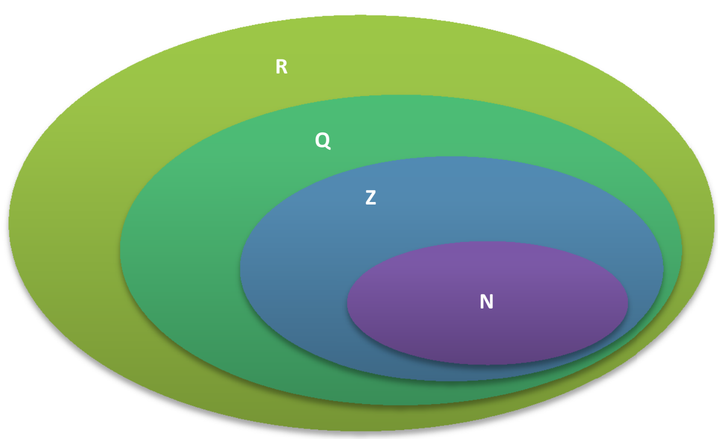

Figura 1 – Diagrama de Venn de alguns conjuntos numéricos infinitos

2.4 NOÇÕES BÁSICAS SOBRE FUNÇÕES

A noção moderna de função está inextricavelmente ligada à teoria de conjuntos: todas as definições dadas a seguir são feitas no contexto da teoria de conjuntos.

O conceito de função ajudará a compreender outros conceitos da teoria de conjuntos, das questões de computabilidade e, quando das aplicações, fornecer definições mais precisas. As funções bijetoras serão particularmente relevantes para o entendimento dos argumentos do trabalho.

2.4.1 **Definição de função**

Antes da definição de função (def. **2.6**), duas definições preliminares são importantes para seu entendimento:

Definição 2.4: O **produto cartesiano** ou **produto direto** $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ de dois conjuntos **A** e **B** é o conjunto de todos os pares ordenados (a, b) onde $a \in \mathbf{A}$ e $b \in \mathbf{B}$.

Definição 2.5: Qualquer subconjunto **S** de $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ é chamado de **relação** de **A** para **B**.

Definição 2.6: Uma **função** ou **mapeamento** f do conjunto **X** no conjunto **Y**, denotado por $f\colon \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$, é uma **relação** de **X** para **Y** com a propriedade que para cada $x \in \mathbf{X}$ existe um único $y \in \mathbf{Y}$ tal que $(x, y) \in f$.

Segundo a def. **2.6**, uma **função é um conjunto** de pares ordenados onde são observadas certas propriedades. É uma crença comum que o que definiria uma função é uma equação, fórmula, lei, regra ou expressão analítica qualquer que associa um elemento de um conjunto com um elemento de outro conjunto. A def. **2.6** e a crença comum serão equivalentes? No capítulo 6 se mostrará se tal crença é compatível com a definição formal de função.

2.4.2 **Conjuntos associados a uma dada função**

Dada a função $f\colon \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$, há 3 importantes conjuntos associados a ela que são: o domínio, o contradomínio e a imagem.

Definição 2.7: O **domínio de *f*** é o conjunto composto por todo $x \in \mathbf{X}$ (esses elementos são chamados de argumentos de *f*), tal que $(x, f(x)) \in f$.

Definição 2.8: O **contradomínio de *f*** é o próprio conjunto **Y**.

O **contradomínio de *f*** tem um subconjunto especial chamado de **imagem de *f***.

Definição 2.9: A **imagem de *f*** é o conjunto composto por todo $f(x) \in \mathbf{Y}$, tal que $(x, f(x)) \in f$.

Logo, o **contradomínio de *f*** pode ter elementos que não pertencem à **imagem de *f***. Os elementos da **imagem de *f*** devem ter as propriedades indicadas na def. **2.9**, as quais não precisam ser verificadas em todos os elementos do contradomínio. A **imagem de *f*** pode ser um subconjunto próprio, ou não, do contradomínio.

2.4.3 **Principais tipos de função**

Uma função $f\colon \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ pode ser, basicamente, de 3 tipos: injetora, sobrejetora ou bijetora.

Definição 2.10: A função *f* é **injetora** se para todo a e b em **X**, se $f(a) = f(b)$, então $a = b$. De forma equivalente, se $a \neq b$, então $f(a) \neq f(b)$.

A função injetora estabelece uma associação **um a um** entre elementos do domínio e do contradomínio. Esta associação, no entanto, pode não incluir todos os elementos do contradomínio. Pode haver elementos do contradomínio sem um elemento correspondente no domínio. Uma ilustração poderia ser a seguinte: em uma festa existem dois conjuntos, o conjunto dos cavalheiros (domínio) e o conjunto das senhoritas (contradomínio). Todos os cavalheiros (cada um formando par com somente uma senhorita (associação um a um)) tem seu par, no entanto o conjunto das senhoritas tem mais elementos que aquele dos cavalheiros. Assim, nem toda senhorita pode formar um par, sobrando senhoritas (elementos do contradomínio).

Uma função injetora é chamada de injeção.

Definição 2.11: A função *f* é **sobrejetora** se, e somente se, para todo *y* no contradomínio **Y** existe pelo menos um *x* no domínio **X**, tal que $f(x) = y$.

Isto equivale a dizer que a **imagem de** $\boldsymbol{f}$ coincide com o **contradomínio de** ***f***, ou seja, $\boldsymbol{Imagem\ de\ f = Contradominio\ de\ f}$.

Retomando a festa da função injetora, nenhuma senhorita ficaria sem par, com cada cavalheiro acompanhando mais de uma senhorita.

Uma função sobrejetora é chamada de sobrejeção.

Definição 2.12: A função *f* é **bijetora** se for injetora e sobrejetora simultaneamente. É uma função um a um e que esgota os elementos do contradomínio.

Uma função bijetora só pode existir quando o domínio e o contradomínio tem o mesmo número de elementos.

Uma função bijetora é chamada de bijeção.

A bijeção é importante para todo o restante do trabalho, pois é através dela que é possível comparar rigorosamente o tamanho de conjuntos.

2.5 PRINCIPAIS CONCEITOS E PROPRIEDADES

A seguir são apresentados alguns conceitos e propriedades relacionados aos conjuntos que são importantes para o desenvolvimento da argumentação em capítulos posteriores.

2.5.1 **Enumerabilidade**

Um dos objetivos de Cantor era mostrar que existiam infinitos de tamanhos diferentes. Como isso foi feito?

Dedekind e Cantor tinham percebido a necessidade de uma relação biunívoca (bijeção) entre elementos para que dois conjuntos fossem equinumerosos ou equipotentes. O conceito de enumerabilidade vai de encontro a essa necessidade. Assim:

Definição 2.13: Um conjunto **S** é **enumerável** se, e somente se, é possível uma bijeção com o $\mathbb{N}$.

Com essa noção, define-se um conjunto infinito de referência com o qual se farão as comparações através da possibilidade de bijeção entre ele e um conjunto a ser testado.

O procedimento básico de Cantor foi fazer uma lista infinita do seguinte tipo:

Números naturais	**Elementos de outro conjunto**
1	n_1
2	n_2
3	n_3
4	n_4
$\vdots$	$\vdots$

Lista 2.1 – Bijeção entre o $\mathbb{N}$ e outro conjunto infinito

Onde cada número natural i, do lado esquerdo da lista, é associado a um único elemento n_i, de outro conjunto, do lado direito da lista.

Diversos conjuntos foram testados e as conclusões foram surpreendentes. Cantor demonstrou (por caminhos que não serão mostrados aqui), para surpresa dos matemáticos de sua época (e para qualquer um que começa a estudar este assunto), que o $\mathbb{Z}$ e o $\mathbb{Q}$ (ambos têm o $\mathbb{N}$ como subconjunto próprio) podem ser associados ao $\mathbb{N}$ por uma bijeção. Também é possível fazer bijeções do $\mathbb{N}$ com os seus subconjuntos próprios infinitos. Assim, o conjunto dos números pares, o conjunto dos números ímpares e o conjunto dos números primos também são enumeráveis. Logo, o conjunto dos números pares, o conjunto dos números ímpares, o conjunto dos números primos o $\mathbb{N}$, o $\mathbb{Z}$ e o $\mathbb{Q}$ são todos equinumerosos. Isto ocorre apenas porque os conjuntos envolvidos são infinitos. Nos conjuntos finitos valem as noções comuns.

No entanto, uma das grandes contribuições de Cantor foi mostrar que existem infinidades diferentes.

Cantor usou um raciocínio semelhante ao seguinte: constrói-se uma lista infinita igual à lista 2.1, colocando números irracionais ao lado direito. Tomam-se apenas os números irracionais no intervalo de 0 a 1 e assume-se a hipótese de que sejam enumeráveis. Cada número irracional é representado por uma cadeia infinita de números naturais, onde $x_{ij} \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. A lista ficaria assim:

Números naturais	**Números irracionais entre 0 e 1**
1	$0.\mathbf{x_{11}}\ x_{12}\ x_{13}\ x_{14}...$
2	$0.x_{21}\ \mathbf{x_{22}}\ x_{23}\ x_{24}...$
3	$0.x_{31}\ x_{32}\ \mathbf{x_{33}}\ x_{34}...$
4	$0.x_{41}\ x_{42}\ x_{43}\ \mathbf{x_{44}}...$
$\vdots$	$\vdots$

Lista 2.2 – Tentativa de bijeção entre o $\mathbb{N}$ e o conjunto dos números irracionais entre 0 e 1

Os elementos da diagonal em negrito (vermelho) perpassam toda a lista. Cada número natural, que indexa uma linha, tem seu elemento correspondente na diagonal (1→ $\mathbf{x_{11}}$, 2→ $\mathbf{x_{22}}$, 3→ $\mathbf{x_{33}}$, 4→ $\mathbf{x_{44}}$, ...).

Daí, constrói-se o número $0.y_1\ y_2\ y_3\ y_4...$, que é irracional e onde $y_1 \neq \mathbf{x_{11}}$, $y_2 \neq \mathbf{x_{22}}$, $y_3 \neq \mathbf{x_{33}}$, $y_4 \neq \mathbf{x_{44}}$, …

O número $0.y_1\ y_2\ y_3\ y_4...$ é diferente do primeiro número da lista em $\mathbf{x_{11}}$, do segundo número da lista em $\mathbf{x_{22}}$, do terceiro número da lista em $\mathbf{x_{33}}$, do quarto número da lista em $\mathbf{x_{44}}$ e assim por diante. Logo, o número construído não pertence à lista (e, de fato, pode-se construir uma infinidade de irracionais que não pertencem à lista). Isso contraria a hipótese, de que o conjunto dos números irracionais entre 0 e 1 seria enumerável. Conclusão: o conjunto dos números irracionais é não-enumerável e, portanto, o $\mathbb{R}$ é **não-enumerável**.

Ser uma infinidade não-enumerável significa que não é possível uma bijeção entre ela e o $\mathbb{N}$. Como a infinidade dos irracionais (ou do $\mathbb{R}$) possui elementos sem índices naturais correspondentes, conclui-se que o conjunto dos números irracionais (ou o $\mathbb{R}$) constitui uma infinidade maior que a infinidade do $\mathbb{N}$.

Este é o famoso "argumento diagonal" de Cantor, que surgiu em 1873. Este argumento, poderoso e original, entrou definitivamente para o repertório matemático, sendo amplamente usado desde então. O "argumento diagonal" será usado novamente no item 6.3.1.

Complementando a terminologia, temos a seguinte

Definição 2.14: Um conjunto **S** é **contável** se, e somente se, ele for finito ou enumerável. Se um conjunto **S** não for contável, então, ele é **incontável**.

Exemplos:

Todo conjunto finito é contável, por exemplo:

A= $\{a, b, c\}$

Todo **conjunto enumerável**, ou seja, todo conjunto infinito em que é possível uma bijeção entre ele e o $\mathbb{N}$, é **contável**. Por exemplo:

O conjunto dos números pares, o conjunto dos números ímpares, o conjunto dos números primos, o $\mathbb{N}$ (naturalmente), o $\mathbb{Z}$, o $\mathbb{Q}$, etc.

Todo **conjunto não-enumerável**, que é infinito e possui mais elementos que os conjuntos enumeráveis, é **incontável**, por exemplo:

O conjunto dos números irracionais, o $\mathbb{R}$, o $\mathbb{C}$ (conjunto dos números complexos), etc.

2.5.2 **Cardinalidade**

Apesar de importante, o conceito de enumerabilidade é um tanto limitado, pois apenas distingue os conjuntos infinitos em duas classes (enumerável e não-enumerável) e é incapaz de quantificar o tamanho dos conjuntos. Uma noção mais abrangente foi introduzida por

Cantor, em 1895: o conceito de **número cardinal** (ENDERTON, 1972), também denominado de **cardinalidade**.

O conceito de número cardinal ou cardinalidade tem por finalidade quantificar o tamanho de um conjunto. O número cardinal, de um conjunto, finito ou infinito, indica o número ou a quantidade de seus elementos. A cardinalidade de um conjunto **A** é indicado por **card A**.

Caso um conjunto seja finito, o seu número cardinal (ou cardinalidade) será um número natural, que é, simplesmente, o número de elementos do conjunto. Por exemplo, o conjunto **A**= $\{a, b, c\}$ possui 3 elementos e, portanto, sua cardinalidade é 3 ou $\mathbf{card\ A} = 3$.

Caso o conjunto seja infinito, os números cardinais recebem o nome de **números transfinitos** (EVES, 2004). Obviamente, não é possível associar um número natural a um conjunto infinito. Para expressar a cardinalidade infinita do $\mathbb{N}$ convencionou-se chamá-la de $\aleph_0$ (alef zero).

Definição 2.15: Conjuntos **A** e **B** são ditos ser **numericamente equivalentes** (equipotentes ou equinumerosos) ou têm o **mesmo número cardinal** se existe uma função bijetora de **A** para **B**.

Teorema 2.3: Se **A** é um conjunto infinito, então $\mathbf{card\ A} \geq \aleph_0$ (HAASER; SULLIVAN, 1991).

2.5.2.1 Cardinalidade $\aleph_0$

Com o conceito de cardinalidade é possível expressar a equivalência numérica de elementos de dois conjuntos, finitos ou infinitos.

Como é possível uma bijeção entre o $\mathbb{N}$, o $\mathbb{Z}$, o $\mathbb{Q}$, o conjunto dos números pares, o conjunto dos números ímpares, o conjunto dos números primos, entre outros, todos têm igual cardinalidade, a cardinalidade $\aleph_0$. Usando a notação adotada: $\mathbf{card}\ \mathbb{N} = \mathbf{card}\ \mathbb{Z} = \mathbf{card}\ \mathbb{Q} = \cdots = \aleph_0$

Pelo teorema 2.3, pode-se concluir que $\aleph_0$ é a cardinalidade do menor infinito.

2.5.2.2 Cardinalidade $\boldsymbol{c}$

A cardinalidade do $\mathbb{R}$ é maior que $\aleph_0$. O número cardinal do $\mathbb{R}$ é representado por $\boldsymbol{c}$, já que o conjunto dos números reais também é conhecido como o ***contínuo***. Simbolicamente: $\mathbf{card}\ \mathbb{R} = \boldsymbol{c}$.

Cantor demonstrou, também, que é possível a bijeção do intervalo unitário de $\mathbb{R}$, [0,1], com:

a) Toda a reta $\mathbb{R}$
b) O $\mathbb{R}^n$

O próprio Cantor ficou tão desconsertado com tais conclusões que, em carta ao seu amigo Dedekind, em 1877, escreveu: "eu vejo isso, mas não acredito nisso" e pediu ao amigo que verificasse as demonstrações (BOYER, 1996).

Um subconjunto próprio de $\mathbb{R}$ que tem cardinalidade $\boldsymbol{c}$ é o conjunto dos números irracionais ($\mathbb{R}$-$\mathbb{Q}$).

Assim, vale o seguinte:

$$\mathbf{card}[\mathbf{0},\mathbf{1}] = \mathbf{card}\ \mathbb{R} = \mathbf{card}\ \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} = \mathbf{card}\ \mathbb{R} - \mathbb{Q} = \boldsymbol{c}$$

Concluindo, o conceito de cardinalidade incorpora o de enumerabilidade (conjuntos com cardinalidade $\aleph_0$) e vai além, oferecendo uma escala de tamanhos para os conjuntos finitos e infinitos.

2.5.3 **Conjunto potência**

Conjunto potência é o conjunto de todos os subconjuntos de um dado conjunto. Os elementos ("objetos") de um conjunto potência são conjuntos também. Ou seja, o conjunto potência é um conjunto de conjuntos.

A notação adotada para o conjunto potência de um conjunto qualquer **S** será *P*(**S**). Por exemplo, o conjunto potência de **A**= $\{a, b, c\}$ é *P*(**A**) = $\{\{\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$.

O número de elementos do conjunto potência de um conjunto com n elementos é 2^n. No exemplo anterior, o número de elementos de $P(\mathbf{A})$ é 2^3=8. Assim a cardinalidade de $P(\mathbf{A})$ é $\mathbf{card}\, P(\mathbf{A}) = 8$.

Qual a relevância do conceito de conjunto potência?

Cantor demonstrou que o conjunto potência de qualquer conjunto, seja vazio, finito ou infinito, terá sempre cardinalidade maior que o conjunto de origem.

Com a idéia de conjunto potência, Cantor foi capaz de construir infinitas infinidades. Partindo dos números transfinitos conhecidos ($\boldsymbol{\aleph_0}$ e $\boldsymbol{c}$), podia se obter números transfinitos maiores por "operações" de conjunto potência. Assim, é possível construir infinidades de cardinalidades maiores a partir de infinitos menores, podendo gerar sequências de infinidades.

Por exemplo:

$$\boldsymbol{\aleph_0} < 2^{\aleph_0} < 2^{2^{\aleph_0}} \ldots$$
$$\boldsymbol{c} < 2^{c} < 2^{2^{c}} \ldots$$

Cantor demonstrou inicialmente que o ***contínuo*** e o infinito enumerável são duas infinidades distintas. Posteriormente, se mostrou que a cardinalidade $\boldsymbol{c}$ era igual à cardinalidade do conjunto potência de um conjunto de cardinalidade $\boldsymbol{\aleph_0}$, ou seja:

$$2^{\aleph_0} = \boldsymbol{c}$$

Com o intuito de criar uma teoria das infinidades, em 1877, Cantor postulou a "hipótese do *contínuo*", que afirma: "Não existe conjunto cuja cardinalidade esteja estritamente entre aquela dos inteiros e aquela dos números reais" (WIKIPEDIA, 2010).

Ao assumir a "hipótese do *contínuo*", vale a seguinte relação (PENROSE, 1999):

$$2^{\aleph_0} = \boldsymbol{c} = \boldsymbol{\aleph_1}$$

O número transfinito $\boldsymbol{\aleph_1}$ (alef um) designa a cardinalidade da segunda menor infinidade. Logo, o ***contínuo*** seria a segunda menor infinidade.

Daí se postulou a "hipótese do *contínuo* generalizada" (SEP, 2007, verbete "The early development of set theory"), onde valem as seguintes relações:

$$2^{\aleph_0} = \aleph_{\mathbf{1}}, 2^{\aleph_1} = \aleph_{\mathbf{2}}, \dots, 2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\boldsymbol{\alpha+1}}, \dots \; \mathbf{(2.1)}$$

A sequência **(2.1)** mostra que haveria uma única sequência infinita de números transfinitos. Assim, com a idéia de conjunto potência e a "hipótese do *contínuo*", Cantor pôde sistematizar os números transfinitos e criar uma teoria bem organizada das infinidades.

A "hipótese do *contínuo*" é realmente uma hipótese, pois ela foi postulada e não demonstrada (questão em aberto até hoje). Os resultados do lógico austríaco Kurt Gödel (1906-1978), em 1940, e do matemático estado-unidense Paul Cohen (1934-2007), em 1963, mostraram que a "hipótese do *contínuo*" é um enunciado indecidível dentro da ZFC. Segundo Flake (1998) e Eves (2004), existe a crença bastante difundida entre os matemáticos de que a "hipótese do *contínuo*" seja verdadeira. O fato é que muitos resultados da matemática moderna dependem desta hipótese.

Para efeitos práticos deste trabalho, se aceita a "hipótese do *contínuo* generalizada" e, assim procedendo, a cardinalidade do $\mathbb{R}$ (e do conjunto dos números irracionais) é $\aleph_{\mathbf{1}}$. Simbolicamente: $\mathbf{card}\,\mathbb{R} = \boldsymbol{c} = \aleph_{\mathbf{1}}$.

Sendo assim, é impossível fazer uma bijeção entre o $\mathbb{N}$ e seu conjunto potência, pois ele tem a mesma cardinalidade do $\mathbb{R}$. Reafirmando, a impossibilidade de bijeção vale para qualquer conjunto e seu respectivo conjunto potência.

3 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

No contexto deste trabalho, o estudo de algumas características e propriedades das equações diferenciais se justifica pela sua presença em boa parte das teorias físicas e dos modelos matemáticos usados em engenharia, particularmente, nos sistemas de potência. Aqui, o objetivo principal de tal estudo é explicitar algumas destas características e propriedades para uma posterior análise, que tem o intuito de buscar os limites desta ferramenta matemática.

Matematicamente, se dará ênfase em associar equações diferenciais a funções. Com relação às características e propriedades, o destaque ficará com os teoremas de existência e unicidade de soluções de equações diferenciais e o uso de métodos numéricos de resolução.

O formalismo desenvolvido neste capítulo abrange uma fração ínfima do tema, mas as definições e teoremas enunciados são suficientes para os propósitos desta tese.

3.1 ORIGENS

Por diversos motivos, na Europa, no século XVII, houve uma demanda para o desenvolvimento de ferramental matemático que pudesse ser aplicado ao estudo do movimento dos corpos. Pouco antes da metade do século XVII, Galileu fez contribuições nesse sentido ao fornecer uma discussão dos indivisíveis e infinitesimais (GALILEI, 1988) que encaminhou os desenvolvimentos posteriores. Galileu não estava em condições de realizar mais, pois a matemática de sua época era basicamente geometria, o que representava tremenda limitação.

Uma contribuição-chave foi dada pelo matemático e filósofo René Descartes (1596-1650) ao inventar a geometria analítica. Ela ligou a geometria, já existente na Europa e que vinha dos gregos, com a álgebra que chegou, mais tarde, através das influências árabes sobre a cultura européia, com a obra do matemático persa Abu Jafar Mohammed ibn Musa al-Khowarizmi (~780- ~850)[15] , dando um ingrediente essencial para o surgimento do cálculo.

[15] al-Khowarizmi foi um autor muito influente e escreveu a importante obra *Kitab al-jabr wal muqabala* (cerca de 825 d. C.), que difundiu a álgebra na Europa. Inclusive a palavra álgebra deriva de *al-jabr* (em árabe "ligar conjuntamente"), que está presente no título do seu livro.

Com essas contribuições, o matemático e metafísico Gottfried Leibniz[16] (1646-1716) e o matemático e físico Isaac Newton[17] (1643-1727) puderam, enfim, chegar ao cálculo, já no final do século XVII. Acredita-se que, antes deles, ninguém havia sido capaz de calcular a velocidade exata de um corpo com aceleração qualquer em um dado instante. O problema das variações contínuas foi, finalmente, bem resolvido.

Com a criação do cálculo foi possível descrever mais adequadamente o movimento dos corpos e, assim, foi introduzido o método das equações diferenciais para o estudo de problemas físicos. Este tipo de descrição lança mão de parâmetros ligados a grandezas físicas como, por exemplo, posição, velocidade e aceleração e suas taxas de variação. Com isso, Newton foi capaz de expressar sua teoria física através da formulação das leis da gravitação e da dinâmica em termos de equações diferenciais. Foi um avanço extraordinário e uma grande conquista para o programa de matematização do estudo da natureza (programa defendido, sobretudo, por Galileu e Descartes[18]).

A teoria de Newton desenvolveu-se nos séculos XVIII e XIX e, através de sucessivos refinamentos das equações newtonianas do movimento, expandiu sua análise para uma faixa mais ampla de fenômenos. Grandes contribuições nesse sentido foram dadas por Leonhard Euler (1707-1783), Joseph Louis Lagrange (1736-1813), Pierre Simon Laplace (1749-1827), William Rowan Hamilton (1805-1865), entre outros.

Tal foi o sucesso da teoria física newtoniana e sua ferramenta (o cálculo e as equações diferenciais) que inspiraram Laplace a propor seu determinismo[19]. O uso do método das equações diferenciais proliferou nas mais diversas áreas científicas para a construção de modelos para o movimento e a mudança (ALLIGOOD, SAUER, YORKE, 1996).

---

[16] Foi Leibniz que propôs o termo "equações diferenciais" em 1676 (EOM, verbete "Differential equation, ordinary").

[17] Newton estudou os trabalhos de Galileu e reconheceu a importância de seus antecessores nos progressos que ele próprio fez.

[18] Os ideais de matematização do estudo da natureza remontam, pelo menos, aos pitagóricos e cuja tradição foi continuada por Platão e seus seguidores. Com o Renascimento europeu e sua revalorização da cultura greco-romana, esse ideal foi retomado.

[19] O determinismo laplaciano será comentado em capítulos posteriores, mas sua formalização é feita na seção 7.3.

3.2 TIPOS PRINCIPAIS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Uma equação diferencial qualquer envolve funções e suas derivadas. As funções, chamadas de variáveis dependentes, podem ter uma ou mais variáveis independentes. Existem diversos critérios para classificar as equações diferenciais, mas aqui serão relevantes apenas dois: quanto ao número de variáveis independentes e quanto à linearidade da equação diferencial.

3.2.1 **Quanto ao número de variáveis independentes**

Este é um dos principais critérios de classificação. A função pode ter uma ou mais variáveis independentes, sendo possível criar duas categorias de equações diferenciais:

1) quando as funções têm apenas uma variável independente, a equação diferencial é dita **ordinária**.
2) quando as funções têm mais de uma variável independente, a equação diferencial é dita **parcial**.

3.2.1.1 Equações diferenciais ordinárias (EDOs)

A expressão geral (forma implícita) de uma equação diferencial ordinária de ordem *n* é dada pela eq. **(3.1)**, a seguir (KAPLAN, 1972, p. 489):

$$F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0 \quad \mathbf{(3.1)}$$

A eq. **(3.1)** pode ser vista como uma função F: $\mathbb{R}^{n+2} \rightarrow \mathbb{R}$.
Os problemas (teóricos ou práticos) podem ser enunciados por uma única equação ou por um sistema com diversas equações.

3.2.1.2 Equações diferenciais parciais (EDPs)

Para a função $u(x_1, \ldots, x_n,)$, a expressão geral de uma equação diferencial parcial é dada pela seguinte equação:

$$F\left(x_1, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \ldots, \frac{\partial^n u}{\partial x_n^n}\right) = 0 \quad \mathbf{(3.2)}$$

A eq. **(3.2)** também pode ser vista como uma função *F*: $\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$, onde k é o número de parâmetros de *F*.

De forma geral, as teorias físicas são formuladas em termos de EDPs. Por ocasião das aplicações em problemas particulares, muitas vezes, é possível simplificar as EDPs em EDOs. As EDOs podem ser vistas como casos particulares das EDPs.

3.2.2 **Quanto à linearidade**

A classificação segundo a linearidade é usada tanto para as equações diferenciais ordinárias, quanto para as parciais: ambas podem ser lineares ou não-lineares.

Para a matemática moderna e suas aplicações, esta distinção se tornou particularmente importante: as características e propriedades de equações diferenciais lineares é marcadamente distinta daquelas das não-lineares. Uma característica que este critério discrimina é a possibilidade de resolução de equações diferenciais por métodos analíticos. Como diz Alligood, Sauer e Yorke (1996):

> Unlike linear systems, most nonlinear systems of ordinary differential equations cannot be solved explicitly, meaning that the solutions cannot be found through an analytic calculation. (ALLIGOOD; SAUER;YORKE, 1996, p. 298)

O comentário também vale para as EDPs.

3.2.2.1 Linearidade para as EDOs

Dada a expressão geral (forma explícita) de uma equação diferencial ordinária de ordem n, a seguir (KAPLAN, 1972, p. 489):

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right) = y^{(n)} \quad (\mathbf{3.3})$$

A eq. **(3.3)** será uma equação diferencial linear ordinária de ordem n se F for uma **combinação linear** das derivadas de y e um termo dependente de x. Simbolicamente, teria a seguinte forma (KAPLAN, 1972, p. 511):

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = Q(x) \quad (\mathbf{3.4})$$

3.2.2.2 Linearidade para as EDPs

Assim como acontece com as EDOs lineares, se a função F da expressão geral de uma equação diferencial parcial dada pela eq. **(3.2)** for uma combinação linear de seus argumentos, então a eq. **(3.2)** será uma equação diferencial linear parcial de ordem n.

3.3 SOLUBILIDADE DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

O problema fundamental das equações diferenciais é a determinação de suas soluções. O processo de solução das equações diferenciais é diferente do processo de formulação. O primeiro costuma ser bastante mais difícil que o segundo.

Geralmente, as equações diferenciais não possuem solução analítica (expressão explícita dada, por exemplo, por funções matemáticas conhecidas). Existem soluções analíticas[20] para

[20] Em muitas aplicações em engenharia, as equações diferenciais não têm soluções neste sentido.

poucos casos simples. Para os demais casos, restam as soluções numéricas, que se tornaram práticas com o advento do computador.

Os métodos de resolução analíticos estão associados principalmente às equações diferenciais lineares, tanto ordinárias quanto parciais, as quais apresentam características e propriedades bem estudadas e conhecidas. Por outro lado, as equações diferenciais não-lineares são de resolução mais penosa (normalmente, não possuem método ou solução analíticos) e cujas características e propriedades apresentam complexidades de difícil tratamento matemático, como, por exemplo, o comportamento caótico.

A tabela 3.1 indica a possibilidade de resolução por métodos analíticos das equações diferenciais e algébricas:

	Equações lineares			**Equações não-lineares**		
	Uma equação	Várias equações	Muitas equações	Uma equação	Várias equações	Muitas equações
Algébrica	Trivial	Fácil	Essencialmente impossível	Muito difícil	Muito difícil	Impossível
Diferencial ordinária	Fácil	Difícil	Essencialmente impossível	Muito difícil	Impossível	Impossível
Diferencial parcial	Difícil	Essencialmente impossível	Impossível	Impossível	Impossível	Impossível

Tabela 3.1 – Classificação de problemas matemáticos e sua facilidade de solução por métodos analíticos (Fonte: BERTALANFFY, 1973, p. 39)

3.3.1 **Teorema Fundamental das equações diferenciais**

Trata-se de um teorema muito importante e bastante abrangente. Sua formulação varia se a equação diferencial é ordinária ou se é parcial, mas o conteúdo é basicamente o mesmo. Os comentários a seguir valem para EDOs e EDPs.

Uma **solução geral** é uma família ou conjunto de infinitas funções e uma **solução particular** é uma função específica dentro da família ou conjunto. A solução particular é obtida pela introdução de especificações complementares de tal sorte a selecionar uma solução específica dentro da solução geral. Entre as especificações possíveis estão as chamadas **condições iniciais** e as chamadas **condições de contorno** (ou fronteira).

Os termos condições iniciais e condições de contorno (ou fronteira) provêm da física.

Condições iniciais trazem uma idéia temporal e se referem a quais são as condições no tempo $t = 0$. Condições de contorno trazem uma idéia espacial e se referem a quais são as condições em diferentes pontos do espaço. Matematicamente, condições iniciais são um caso especial de condições de contorno. Se todas as condições de contorno são referidas a $t = 0$, então as condições são conhecidas como condições iniciais (FRANKS, 1966). A palavra condições quer dizer quais são os valores da função incógnita e suas derivadas em um instante inicial (condições iniciais) ou em certos pontos do espaço (condições de contorno).

O Teorema Fundamental das equações diferenciais faz afirmações sobre as soluções particulares, quando do conhecimento das condições iniciais. O problema de encontrar uma solução particular, dadas as condições iniciais, é denominado *problema do valor inicial* ou *problema de Cauchy*. Este teorema afirma que, dadas as condições iniciais, a solução particular de uma equação diferencial **existe** e é **única**.

É relevante destacar que este é um teorema bastante geral, mas que nem sempre é válido (requisitos precisam ser preenchidos para garantir sua validade). De qualquer forma, seu conteúdo é notável, pois assegura a existência da solução e que há apenas uma. Esse fato pode ser contrastado com, por exemplo, sistemas lineares algébricos (estudados em álgebra linear), onde há muitos sistemas em que a solução não existe e outros tantos em que a solução não é única.

Esta propriedade das equações diferenciais teve influência na idéia moderna de determinismo, que será elaborada em capítulos posteriores desta tese.

3.3.1.1 Teorema Fundamental para as EDOs

Teorema 3.1: Seja uma equação diferencial ordinária de ordem *n* dada na forma da eq. **(3.3)** e suponhamos a função *F* definida com derivadas parciais primeiras contínuas num aberto *D* do espaço de suas variáveis. Seja $(x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)})$ um ponto de *D*. Então **existe** uma função $y = f(x)$, $x_o - \delta < x < x_0 + \delta$, $\delta > 0$, que é uma **solução particular** da eq. **(3.3)** e satisfaz às **condições iniciais**[21] $f(x_0) = y_0, f'(x_0) = y'_0, \ldots, f^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$. Além disso, a solução é **única**, isto é, se $y = g(x)$ é uma segunda solução da eq. **(3.3)** satisfazendo as

[21] Condições iniciais são uma referência temporal. No caso do teorema, se *x* é uma variável que representa o tempo, x_0 é um instante inicial no qual a função e suas derivadas adquirem certos valores.

condições iniciais, então $g(x) = f(x)$ em todo x onde ambas estejam definidas (KAPLAN, 1972, p. 491).

Os requisitos para que este teorema seja válido são: que todas as funções envolvidas sejam contínuas e que respeitem a *condição de Lipschitz.*

3.3.1.2 Teorema Fundamental para as EDPs

Teorema 3.2 (Cauchy-Kovalevsky): Seja x^0 um ponto da superfície inicial S. Suponha que todas as funções envolvidas na equação diferencial sejam analíticas[22] nas vizinhanças de x^0. Então, o *problema de Cauchy* tem uma solução $u(x_1, \dots, x_n)$, que é definida e analítica nas vizinhanças de x^0.

Teorema 3.3 (Holmgren): Esta solução é única (ZACHMANOGLOU; THOE, 1986, p. 133).

O teorema de Cauchy-Kovalevsky demanda que todas as funções no interior da equação diferencial parcial sejam analíticas.

3.3.1.3 Exemplos de equações diferenciais onde a solução não existe ou não é única

É importante destacar que o Teorema Fundamental nem sempre é válido. A seguir são mostrados um exemplo onde a solução **não existe** para todo *t* e um exemplo onde a solução **não é única**.

O exemplo seguinte (ALLIGOOD; SAUER; YORKE, 1996, p. 282) mostra a **inexistência** da solução para certo t_∞:

[22] Apenas no contexto deste teorema, uma função *f* é dita ser analítica quando uma série de Taylor converge para *f* em todos os pontos de seu domínio (ZACHMANOGLOU; THOE, 1986).

A equação diferencial ordinária:

$$\dot{x} = x^2 \quad \mathbf{(3.5)}$$

cuja condição inicial é

$$x(t_0) = x_0$$

A solução da equação diferencial é

$$x(t) = \frac{x_0}{1 + x_0(t_0 - t)}$$

Se $x_0 \neq 0$, então a solução $x(t)$ só está definida para

$$t \neq t_0 + \frac{1}{x_0}$$

Se

$$t_\infty = t_0 + \frac{1}{x_0}$$

então

$$\lim_{t \to t_\infty} x(t) = \infty$$

Logo, a solução da eq. **(3.5)** não existe para qualquer *t*. Existe apenas nos intervalos $(-\infty, t_\infty)$ ou (t_∞, ∞).

O exemplo (ALLIGOOD; SAUER; YORKE, 1996, p. 294) a seguir mostra a **não-unicidade** da solução:

A equação diferencial ordinária:

$$\dot{x} = \sqrt{x} \quad \mathbf{(3.6)}$$

cuja condição inicial é

$$x(0) = 0$$

Admite duas soluções:

$$x(t) = 0$$

$$x(t) = t^2/4$$

A eq. **(3.6)** não tem solução única. Este é outro exemplo onde o Teorema Fundamental não se aplica.

3.3.2 **Soluções numéricas**

Considerando todos os tipos de equações diferenciais, uma ínfima parte delas possuem métodos ou soluções analíticas. Além das grandes dificuldades em termos de métodos e soluções analíticas, viu-se que o Teorema Fundamental das equações diferenciais não é onipotente e sua validade está condicionada a que certos requisitos sejam preenchidos, pois, caso contrário, pode ocorrer da solução não existir ou não ser única.

A dificuldade de resolução das equações diferenciais foram percebidas há muito tempo. Já no século XVIII, o matemático e físico suíço Leonhard Euler apontava para os problemas de resolução (STEWART, 1991). Dizia Euler

> [...] se não nos é permitido penetrar num conhecimento completo a respeito do movimento dos fluidos, não é à mecânica, ou à insuficiência dos princípios conhecidos, que devemos atribuir a causa. É a própria análise que nos abandona aqui. (STEWART, 1991, p.46)

Quando não há métodos analíticos ou expressões analíticas para a solução de equações diferenciais, a única forma de obtê-las é através de métodos numéricos. Existem diversos métodos numéricos, o próprio Euler desenvolveu métodos numéricos para resolução de equações diferenciais, inclusive um que leva o seu nome.

Os métodos numéricos ganharam mais espaço com o surgimento dos computadores, pois são métodos recursivos/iterativos que requerem, mais do que nada, capacidade de cálculo repetitivo. A velocidade dos computadores tornaram estes métodos práticos.

Os métodos numéricos seguem algoritmos bem definidos.

3.3.2.1 Soluções numéricas para EDOs

Entre os diversos métodos, existem dois que são importantes para a resolução de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem: o método de Euler e o método de Runge-Kutta, ambos são baseados em expansão em série de Taylor (HUMES; et al., 1984). Estes métodos são amplamente usados para cálculos em sistemas de potência.

O método de Euler usa apenas dois termos de uma série de Taylor, ao passo que o método de Runge-Kutta usa mais termos. Em sistemas de potência, o método de Runge-Kutta costuma ser de quarta ordem (cinco termos da expansão em série de Taylor). O método de Euler é menos preciso, mas exige menos recursos computacionais. Por outro lado, o método de Runge-Kutta demanda mais recursos computacionais, mas é mais preciso.

Em muitos casos, é possível aproximar equações diferenciais ordinárias de ordens maiores, em sistemas de equações de primeira ordem. Por esse motivo, a resolução de equações de primeira ordem é especialmente importante.

3.3.2.2 Soluções numéricas para EDPs

Entre os diversos métodos numéricos de resolução equações diferenciais parciais são de destaque: o método dos elementos finitos, o método dos volumes finitos e o método das diferenças finitas.

O método dos elementos finitos é bastante usado em eletromagnetismo para o estudo de campos magnéticos em máquinas elétricas, por exemplo.

3.4 PROBLEMAS RELEVANTES

A seguir será apresentado o problema genérico das equações de onda para a introdução das questões que serão discutidas no capítulo 7 – Aplicações em sistemas elétricos de potência e controle. A equação de onda é relativamente simples, o que facilita as análises.

3.4.1 **Equação de onda**

A vibração e os fenômenos de propagação de ondas podem ser descritos por uma equação diferencial parcial linear de segunda ordem chamada de **equação de onda**. São de interesse físico ("clássico") as equações de até três dimensões. Aqui serão estudados os casos uni e tridimensional. O caso unidimensional, será um pouco mais explorado, ao passo que, o caso tridimensional, será apenas citado.

3.4.1.1 Equação de onda unidimensional

Uma corda de comprimento L vibra no plano (x, u) e cada ponto da corda move-se apenas na direção perpendicular ao eixo x (e paralelamente ao eixo u). $u(x,t)$ indica o deslocamento vertical da corda no instante t no ponto da corda com coordenada x (ver figura 2). Assumindo que $\partial u/\partial x$ é pequeno (ou seja, a vibração da corda é de pequena amplitude), $u(x,t)$ deve satisfazer a equação diferencial parcial linear de segunda ordem:

$$T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad \mathbf{(3.7)}$$

Onde:

T é a tração da corda

ρ é a densidade linear da corda

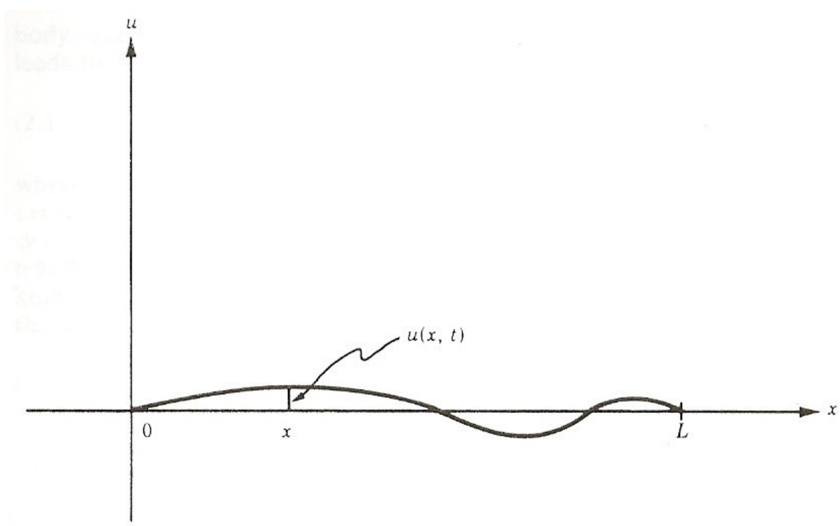

Figura 2 – Uma corda de comprimento L vibrando no plano (x, u)
(Fonte: ZACHMANOGLOU; THOE, 1986, p. 164)

A eq. **(3.7)** pode ser simplificada, ficando:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (\mathbf{3.8})$$

A eq. **(3.8)** tem infinitas soluções. Para obter uma solução particular, condições adicionais devem ser fornecidas. Caso a corda seja infinita, são necessárias apenas duas condições iniciais:

$$u(x, t_0) = \varphi(x) \qquad -\infty < x < \infty$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t_0) = \psi(x) \qquad -\infty < x < \infty$$

Onde:

$u(x, t_0)$ é o deslocamento inicial da corda

$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t_0)$ é a velocidade inicial

Caso a corda seja finita serão necessárias mais duas condições de contorno, que podem ser $u(x, t)$ ou $\partial u/\partial x$, nas extremidades da corda, para $t \geq t_0$. Por exemplo:

$$u(0, t) = 0$$
$$u(L, t) = 0$$

A solução geral da equação de onda unidimensional é:

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[\varphi(x + t) + \varphi(x - t)] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \psi(\tau) d\tau \quad (\mathbf{3.9})$$

A figura 3 mostra uma solução para a equação de onda unidimensional para instantes sucessivos de tempo.

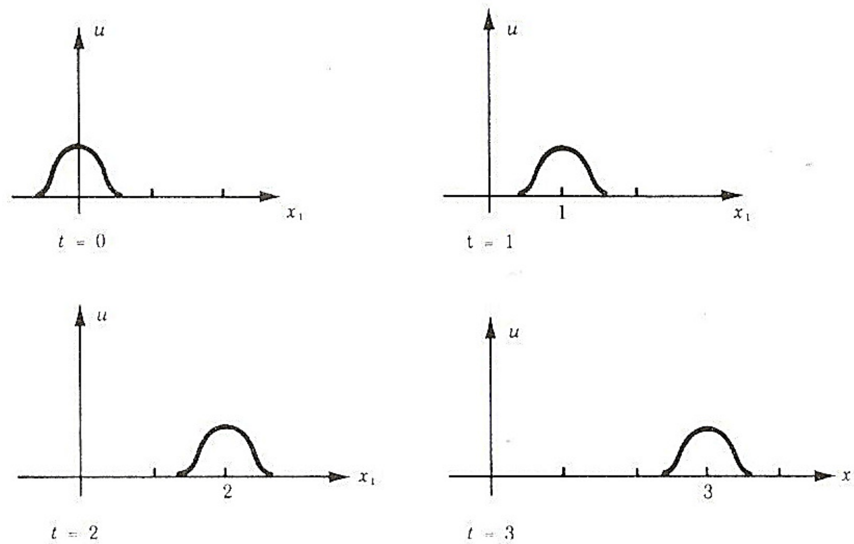

Figura 3 – Uma solução da equação de onda unidimensional para instantes sucessivos discretos
(Fonte: ZACHMANOGLOU; THOE, 1986, p. 265)

A equação de onda unidimensional pode ser usada para representar surtos em linhas de transmissão, o que será visto no subitem 7.2.4.1.

3.4.1.2 Equação de onda tridimensional

A equação de onda tridimensional vale quando a propagação da onda pode ocorrer em qualquer direção do espaço. Esta equação pode descrever a propagação de ondas eletromagnéticas no espaço. A seguir, a equação de onda tridimensional em coordenadas cartesianas:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad \mathbf{(3.10)}$$

Para o *problema de Cauchy*, $u(x, y, z, t)$ é determinada quando as seguintes condições iniciais $(t = 0)$ são fornecidas:

1. $u(x, y, z, 0)$
2. $\frac{\partial u(x,y,z,0)}{\partial t}$

No subitem 7.2.4.2, serão tecidos alguns comentários desta equação em um contexto aplicado.

4 TEORIA DO CAOS DETERMINÍSTICO: NOÇÕES SOBRE SISTEMAS CAÓTICOS

No interior de um importante ramo da matemática chamado de sistemas dinâmicos, se encontra a Teoria do Caos Determinístico, que é uma **teoria matemática** fortemente vinculada às aplicações em física. Este vínculo se deve, entre outros motivos, a que muitos desenvolvimentos da teoria devem tributos a estudos realizados em campos da física, como a mecânica celeste (o problema dos *n* corpos sob interação gravitacional), a meteorologia, a mecânica dos fluidos, a eletrônica, entre outros.

Os sistemas ditos caóticos são o objeto de estudo de tal teoria. Uma definição informal poderia ser a seguinte: sistemas caóticos são sistemas (conjuntos) de equações diferenciais (ou de diferenças) não-lineares, que podem ou não estar vinculadas a um sistema físico, e que apresentam a notável propriedade de **Dependência Sensitiva das Condições Iniciais (DSCI)**. Quando a representação é contínua são usadas equações diferenciais, ao passo que, quando a representação é discreta são usadas equações de diferenças. Por uma questão de foco, a discussão, daqui em diante, se limitará aos sistemas caóticos como sistemas de (uma ou mais) equações diferenciais.

Analisando a expressão Teoria do Caos Determinístico, chama a atenção o aspecto paradoxal que apresenta os significados entre os termos da expressão. A seguir, ao tratar de justificar tal expressão, serão apresentados um pequeno histórico e as principais características da teoria.

Do ponto de vista matemático, este capítulo apresentará apenas aspectos essenciais da Teoria do Caos Determinístico, sem entrar em maiores detalhes e formalismos aprofundados (dada sua complexidade e extensão), sendo exposto apenas o necessário para as discussões que serão feitas ao longo do trabalho.

4.1 BREVE HISTÓRICO

É considerado marco inicial da Teoria do Caos Determinístico, os trabalhos do matemático, físico, engenheiro e filósofo da ciência francês Jules Henri Poincaré.

Em 1887, para festejar o sexagésimo aniversário de Oscar II, rei da Suécia, foi oferecido um prêmio para quem respondesse à pergunta: o sistema solar é estável? Para responder a questão era necessário resolver o problema dos *n* corpos sob interação gravitacional newtoniana. O problema consistia, basicamente, em dar a solução geral de um sistema de equações diferenciais que descreviam as interações gravitacionais mútuas entre *n* corpos. Este problema foi divulgado em 1687, no famoso livro de Newton, *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*, e que permanecia em aberto 200 anos depois de sua aparição pública.

Poincaré disputou o prêmio, com o ensaio *Sobre o problema dos três corpos e as equações da dinâmica*, e ganhou, sem resolver o problema[23]. Ele venceu porque mais ninguém havia resolvido o problema e a banca julgadora considerou seu estudo uma grande contribuição científica. Ele demonstrou que, em alguns sistemas dinâmicos (entre eles, o dos 3 corpos interagindo através de forças gravitacionais), qualquer imprecisão na determinação das condições iniciais resultaria na divergência das soluções numéricas, impossibilitando a predição de estados posteriores (LISBOA, 2004).

Relacionado ao problema dos 3 corpos, escreveu Poincaré em seu livro *Ciência e método*, de 1908:

> Uma causa muito pequena, que nos passa despercebida, determina um efeito considerável que não podemos deixar de ver, e então dizemos que o efeito é devido ao acaso. Se conhecêssemos exatamente as leis da natureza e a situação do universo no momento inicial, poderíamos prever exatamente a situação desse mesmo universo no momento seguinte. Contudo, mesmo que as leis naturais já não tivessem segredos para nós, ainda assim poderíamos conhecer a situação aproximadamente. Se isso nos permitisse prever a situação seguinte com a mesma aproximação, seria tudo o que precisaríamos, e diríamos que o fenômeno tinha sido previsto, que é governado por leis. Mas nem sempre é assim; pode acontecer que pequenas diferenças nas condições iniciais produzam diferenças muito grandes nos fenômenos finais. Um pequeno erro nas primeiras produzirá um erro enorme nas últimas. A previsão torna-se impossível [...] (POINCARÉ, 1908 apud GLEICK, 1991, p. 28-29)

Poincaré desenvolveu uma teoria matemática vinculada a um problema físico bastante específico. Após estes primeiros passos, que ligava a teoria matemática à física, houveram avanços predominantemente na teoria matemática, sem maior atenção com sistemas físicos,

---

[23] A solução geral para o problema dos 3 corpos foi encontrada, em 1912, pelo matemático finlandês Karl Sundman (1873-1949) e para o problema de *n* corpos, em 1991, pelo matemático chinês Qiu Dong Wang.

com contribuições de matemáticos como George Birkhoff (1884-1944), na década de 1920, Mary Cartwright (1900-1998) e John Littlewood (1885-1977), na década de 1940 e Stephen Smale (1930-), na década de 1960 e matemáticos russos como Andrey Kolmogorov (1903-1987) e seus colaboradores (OTT, 1993). Com o desenvolvimento dos computadores, os estudos se voltaram novamente para a física a partir dos trabalhos do meteorologista estado-unidense Edward Lorenz (1917-2008), que estudava modelos matemáticos para a previsão do tempo através de simulações computacionais. *Deterministic nonperiodic flow* (1963), de Lorenz, foi o artigo seminal desta nova fase, cujo desenvolvimento mais intenso começou na década de 1970.

4.2 POR QUE O USO DO TERMO "DETERMINÍSTICO"?

O termo "determinístico" se refere a um resultado matemático bastante geral dos sistemas de equações diferenciais conhecido como Teorema Fundamental das equações diferenciais. Como visto no capítulo 3, este teorema afirma que, preenchidos alguns requisitos (que variam segundo o tipo de equação diferencial), a solução para o *problema de valor inicial* ou *problema de Cauchy* **existe** e é **única**. Ou seja, preenchido os requisitos e dadas as condições iniciais, a solução da equação (ou sistema de equações) existe e é única, o que é considerado uma **determinação** do sistema.

Mas por que, exatamente, é considerada uma determinação?

A solução é uma função ou conjunto de funções, onde é possível determinar, univocamente, os valores da função (ou conjunto de funções) a partir do valor das variáveis independentes. Os valores da função (ou conjunto de funções) determinam o estado do sistema.

Por exemplo, se uma das variáveis independentes for o tempo (t) e, para cada t, há um, e apenas um, valor para a função (ou para cada função de um conjunto), então existe uma noção de determinação de estados em uma sucessão temporal (passado, presente e futuro), que poderiam ser calculados usando a solução (uma função ou conjunto de funções) e os t particulares de interesse. Considerando que a maioria das leis da física é apresentada na forma de equações diferenciais e que possuem, muitas vezes, o tempo como uma de suas variáveis independentes, o Teorema Fundamental dá uma clara noção de determinação dos estados físicos ao longo do tempo.

Caso houvesse dúvidas sobre a existência da solução ou se houvesse mais de uma solução, então a determinação não seria clara, por causa da inexistência de resposta ou por causa da ambiguidade da resposta. O sistema deve apresentar uma **evolução única** (SEP, 2008, verbete "Chaos") para que a determinação fique caracterizada.

Foi a partir deste **determinismo matemático** e da teoria mecânica newtoniana que a idéia de **determinismo físico** foi formalizada por Laplace, no começo do século XIX[24].

Os sistemas caóticos são sistemas de equações diferencias não-lineares que compartilham a propriedade de existência e unicidade da solução para o *problema de Cauchy* e, por essa razão, do termo "determinístico". No entanto, a existência e unicidade da solução não significa que a função (ou conjunto de funções) seja analítica. De fato, a dinâmica caótica não pode ser representada por funções analíticas padrão (OTT, 1993). Por isso, a necessidade das **soluções numéricas**.

A postura filosófica determinista, que tem impactos na prática da engenharia, será discutida com mais detalhes na seção 7.3 deste trabalho. Por ora, serão feitas uma pequena introdução ao assunto e algumas considerações de natureza mais matemática.

4.3 POR QUE O USO DO TERMO "CAOS"?

O termo caos foi incorporado ao jargão matemático após a publicação do artigo *Period three implies chaos* de James A. Yorke e Tien Yien Li, em 1975. Etimologicamente, a palavra caos provém do latim *chàos*, que significa confusão, mistura confusa de elementos ou, ainda, os infernos, a escuridão, as trevas, o fim do mundo. A palavra latina veio do grego *kháos*, que significa incomensurabilidade do espaço e do tempo.

No contexto da teoria matemática, a palavra caos tem a conotação de confusão: uma das características marcantes do comportamento caótico é a aperiodicidade. Mais adiante, se verá que é possível encontrar na dinâmica caótica uma espécie de padrão, mas ele não é exato, nem simples e nem direto.

A figura 4 ilustra o comportamento aperiódico de uma partícula de poeira na órbita de dois planetas de massas iguais, o famoso problema dos 3 corpos encarado por Poincaré. A figura

[24] O determinismo laplaciano será elaborado na seção 7.3.

apresenta 2 instantes distintos da dinâmica, sendo que a parte inferior da figura mostra um instante posterior.

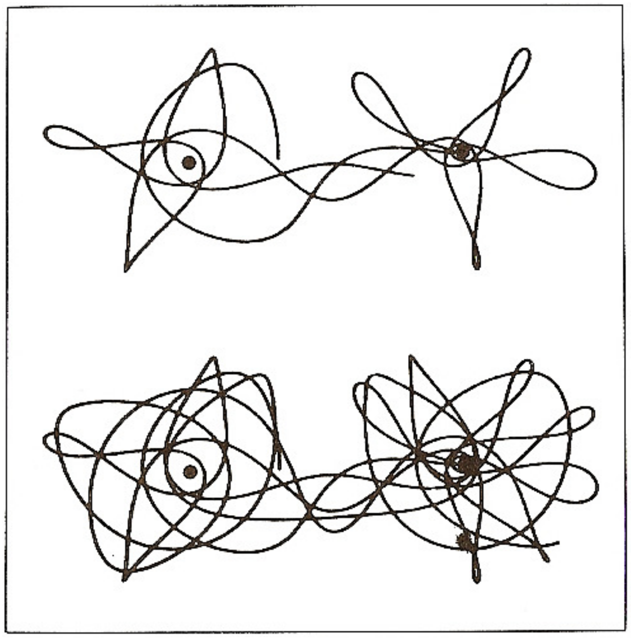

Figura 4 – Problema dos 3 corpos (uma partícula de poeira na órbita de dois planetas de massas iguais). A complexidade da dinâmica se deve à divergência no cálculo numérico de um estado (posição e velocidade) futuro dadas condições iniciais arbitrariamente próximas, porém diferentes
(Fonte: STEWART, 1991, p.75)

Ao observar o comportamento da partícula de poeira ao longo do tempo (a figura 4 representa dois instantes distintos da mesma dinâmica, sendo que o primeiro instante está acima e, o segundo, está abaixo), a função posição em relação ao tempo não se repete, tendo uma dinâmica bastante complexa. A aperiodicidade está intimamente relacionada à principal propriedade dos sistemas caóticos: a DSCI. Todo sistema caótico apresenta a propriedade de DSCI. Que propriedade é essa?

Essa propriedade se refere às **soluções numéricas** de equações diferenciais. Dada uma equação diferencial, as soluções que começam com condições iniciais diferentes divergiram exponencialmente, mesmo que tais condições iniciais sejam arbitrariamente próximas. Isso está em evidente contraste com as soluções de equações diferenciais lineares, onde condições iniciais arbitrariamente próximas resultam em soluções arbitrariamente próximas.

4.3.1 **Definição de Dependência Sensitiva das Condições Iniciais**

Formalizando a definição de Dependência Sensitiva das Condições Iniciais:

Definição 4.1: Seja f um mapa (ou função) em $\mathbb{R}$. Um ponto x_0 tem **Dependência Sensitiva das Condições Iniciais** se houver uma distância d, não-nula, tal que, pontos arbitrariamente próximos de x_0 são mapeados a, pelo menos, d unidades da imagem correspondente de x_0. Mais precisamente, existe um $d > 0$ tal que, qualquer vizinhança N de x_0 contém um ponto x tal que, $|f^k(x) - f^k(x_0)| \geq d$ para algum inteiro não-negativo k. O ponto x_0 é chamado **ponto sensitivo** (ALLIGOOD, SAUER, YORKE, 1996).

O índice k se refere ao método iterativo de cálculo. Geralmente, quanto mais próximo x está de x_0, maior deverá ser k (número de iterações) para que a divergência das soluções alcance a distância d.

Um exemplo bastante simbólico desta definição é justamente o trabalho pioneiro de Lorenz. Em 1961, Lorenz fazia simulações computacionais com sistemas de equações diferenciais para estudo de fenômenos atmosféricos. Um dia simulava certo conjunto de equações diferenciais não-lineares, que modelavam a convecção atmosférica. Ele simulou o sistema uma primeira vez, mas queria repetir a simulação, só que durante um tempo maior. Para não ter que repetir tudo novamente e esperar várias horas (já que os computadores eram muito lentos), anotou os dados do começo da segunda metade da simulação antiga e rodou novamente o programa a partir dali. Ele saiu para tomar um café e, na volta, para seu espanto, a máquina não havia repetido a segunda metade da simulação antiga. No princípio, os gráficos coincidiam, mas, depois, divergiam completamente (STEWART, 1991). A figura 5 mostra o que ocorreu:

Figura 5 – Evolução temporal de uma das variáveis das equações diferenciais de Lorenz. Uma das curvas foi simulada com a condição inicial 0.506127 e, a outra, com a condição inicial 0.506. Elas coincidem no princípio, mas divergem completamente logo depois
(Fonte: STEWART, 1991, p. 155)

O que havia acontecido? Houve algum problema na máquina?

A máquina estava perfeita. O problema foram as condições iniciais inseridas por Lorenz. Na primeira simulação, a condição inicial do ponto era, na verdade, 0.506127 (que era dada pela precisão de 6 casas decimais do computador) e Lorenz truncou o dado, colocando 0.506, pois acreditava que essa pequena diferença (uma parte em mil) não teria grande peso. E, na verdade, tinha.

À propriedade DSCI associada a fenômenos atmosféricos, Lorenz cunhou o termo "efeito borboleta", que surgiu, em 1979, no trabalho *Predictability: Does the flap of a butterfly's wings in Brazil set off a tornado in Texas?*, onde se sugere que uma borboleta batendo suas asas em certa região do planeta poderia provocar tempestades em outra região.

A divergência na **solução numérica** resulta das não-linearidades na equação que fazem com que as pequenas imprecisões das condições iniciais sejam amplificadas exponencialmente (LISBOA, 2004).

Duas soluções numéricas de sistemas caóticos só não divergiriam se as condições iniciais fossem **idênticas** (as infinitas casas decimais de um número real, no caso geral), pois seria exatamente a mesma solução (quando se pode garantir a existência e unicidade da solução ao problema de Cauchy). Segundo Lisboa (2004):

> No cerne do comportamento caótico está a propriedade, exibida por certos sistemas, de *Dependência Sensitiva das Condições Iniciais* [DSCI]. Quando presente, a DSCI é responsável por amplificar pequenas incertezas ou diferenças no estado inicial, transformando-as em incertezas colossais na evolução do sistema a longo termo.
> Em tese, seria possível predizer mesmo o comportamento caótico determinístico, embora, para isso, necessitar-se-ia de **precisão infinita** na determinação do estado inicial de um dado sistema regido por equações determinísticas que apresentassem DSCI. (LISBOA, 2004, p. 96-97, itálico do autor, negrito nosso)

A **necessidade de precisão infinita** das condições iniciais para a determinação completa de uma solução particular, onde pequenas diferenças nas condições iniciais determina outra solução particular muito diferente e sua eventual associação com estados futuros (ou passados) de sistemas físicos são os aspectos mais importantes dos sistemas caóticos do ponto de vista deste trabalho.

4.3.2 **Dinâmica caótica comparada a outras dinâmicas**

A dinâmica caótica pode ser vista como um "meio termo" entre a dinâmica periódica e a dinâmica aleatória.

Na **dinâmica periódica**, em um dos extremos, os valores das variáveis de uma função apresentam um **padrão** ou **regularidade** claros: os valores se repetem a cada certo período. Além disso, os valores da função em um dado ponto podem ser determinados através de valores anteriores. Para ilustrar a dinâmica periódica, um exemplo simples:

$$\frac{df(t)}{dt} = \cos(t) \quad (\mathbf{4.1})$$

A solução da eq. **(4.1)** é

$$f(t) = \text{sen}(t) + k \quad (\mathbf{4.2})$$

Onde:

k=constante

A eq. **(4.2)** é uma função periódica, pois seus valores são exatamente os mesmos a cada período T=2π rad. O valor de qualquer ponto da função poderia ser determinado pelo conhecimento de algum valor anterior.

Em outro extremo, na **dinâmica aleatória**, os valores de uma função (não como uma expressão analítica ou regra, mas no sentido de que para cada t há um único $f(t)$) apresentam **ausência de padrão** ou **total irregularidade**. Além disso, um valor qualquer não pode ser determinado através do conhecimento de outros valores e nem é dependente deles. Cada valor é sempre independente e equiprovável. Os valores da função podem ou não serem limitados.

A dinâmica caótica não apresenta um padrão no sentido de que os valores da solução de uma equação diferencial se repetem, mas existe uma dependência com os valores anteriores. Apesar disso, a DSCI impossibilita determinações de valores posteriores no longo termo.

Se os valores da solução não se repetem, como pode haver algum padrão?

Quando as variáveis das equações são representadas em espaços de fases (ou de estados, ou das variáveis, onde os eixos coordenados representam variáveis das equações diferenciais e o tempo é excluído como parâmetro explícito) apresentam **certas regularidades** que não são evidentes com representações em séries temporais.

Por isso, a dinâmica caótica pode ser interpretada como um "meio termo", já que, ao mesmo tempo em que possui um forte caráter de imprevisibilidade (onde as previsões precisas de longo termo continuam essencialmente inalcançáveis), possui, também, algumas regularidades reconhecíveis. Essas peculiaridades da dinâmica caótica são listadas a seguir (LISBOA, 2004):

a) **Imprevisibilidade**: o fato de conhecer o estado do sistema por períodos arbitrariamente longos não permite predizer estados posteriores. As soluções numéricas são aperiódicas.
b) **Espectro contínuo de frequências**: ao aplicar a transformada de Fourier à solução da equação diferencial de um sistema caótico, o espectro de frequências é contínuo, o que configura um comportamento aperiódico. Do ponto de vista de sinais experimentais, a transformada de Fourier não permite distinguir entre um sinal caótico e um ruído branco.
c) **Estacionaridade**: apesar de aperiódica, a dinâmica caótica tende a certa repetição, sendo possível definir um pseudo-período médio. A amplitude da dinâmica é limitada. Essas características podem ser observadas na figura 6.

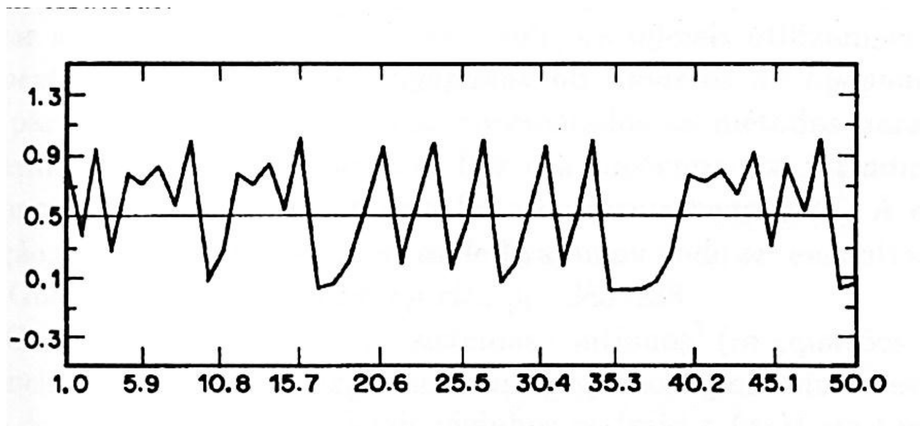

Figura 6 – A curva apresenta “padrões” aperiódicos e amplitude limitada
(Fonte: FIEDLER-FERRARA; PRADO, 1994)

Resumindo, apesar do nome, a dinâmica caótica não é um comportamento aleatório, mas apresenta certos padrões matemáticos identificáveis. No entanto, tais padrões são difusos (não há determinação precisa de valores, há apenas intervalos possíveis) e de constatação mais complexa e indireta, requerendo técnicas matemáticas refinadas.

4.4 DINÂMICA CAÓTICA E SUAS IMPLICAÇÕES NA FÍSICA

É importante reafirmar que a Teoria do Caos Determinístico é uma discussão sobre propriedades matemáticas e não sobre propriedades físicas. Tanto é assim, que suas implicações estão espalhadas em muitos campos, descrevendo fenômenos de naturezas totalmente diferentes, mas que apresentam isomorfismo matemático. Como destaca Lisboa (2004):

> Desde pêndulos caóticos, reações químicas auto-catalíticas, fluidos em convecção térmica, lasers caóticos e até mesmo sistemas de natureza biológica ou fisiológica. Por exemplo, até mesmo o comportamento caótico cardíaco já foi controlado. (LISBOA, 2004, p. 41)

Fenômenos que forem descritos por equações diferenciais não-lineares semelhantes poderão apresentar a mesma dinâmica caótica[25].

[25] O isomorfismo em modelos matemáticos não é novidade para os engenheiros: muitos sistemas físicos de naturezas diversas (elétricos, mecânicos, etc.) são descritos pelo mesmo tipo de equações diferenciais lineares e, portanto, apresentando o mesmo comportamento dinâmico apesar de suas diferenças. A teoria de controle clássica lida normalmente com esse fato.

Existem diversos casos onde o comportamento caótico descreve adequadamente em sistemas físicos. Qual seria a implicação física disso?

4.4.1 **O problema da simplificação**

A questão da simplificação não deveria ser: devo simplificar ou não? Mas, sim: o quanto devo simplificar? A simplificação é inevitável e onipresente, pelo menos, em problemas matemáticos físicos. A simplificação foi, e é, essencial para a ciência e, particularmente, para a engenharia, onde é comum e muito útil: possibilita a resolução de diversos problemas, muitos dos quais com aplicações importantes. Uma forma de simplificação são as idealizações e aproximações nas situações experimentais[26], como, por exemplo, a eliminação do atrito ou da resistência do ar. Outra forma de simplificar problemas são os processos de linearização, que consistem em eliminar termos não-lineares de equações diferenciais.

Por outro lado, a simplificação, também, deforma os problemas originais, pode diminuir a abrangência e ocultar complexidades relevantes. Por exemplo, linearizar significa, muitas vezes, restringir o estudo para situações particulares onde há, apenas, pequenas oscilações[27], pequenas ondas, pequenos gradientes de temperatura, etc. (STEWART, 1991 e CAPRA, 1996) ao redor de certo ponto (ponto de equilíbrio).

Com relação a ocultar complexidades relevantes, o senso comum da física-matemática até o século XIX (e até hoje para muitos) era a crença de que a solução aproximada para um problema exato seria o mesmo que a solução exata para um problema aproximado (ou seja, simplificado). Esta crença foi particularmente solapada pelo estudo dos sistemas não-lineares, como os sistemas caóticos, que tem um comportamento completamente diferente daquele dos sistemas lineares. A complexidade da dinâmica caótica é perdida no processo de linearização.

É necessário ser criterioso ao simplificar, mais ainda quando se sabe que sistemas físicos descritos por equações diferenciais não-lineares constituem a regra e não a exceção.

---

[26] Acredita-se que Galileu tenha sido o introdutor das idealizações e aproximações no estudo da física.

[27] Foi demonstrado rigorosamente por Aleksandr Lyapunov (1857-1918) (outro importante matemático para o desenvolvimento da teoria dos sistemas dinâmicos), em 1895, que, para pequenas oscilações, o comportamento do pêndulo se aproxima, de fato, do movimento harmônico simples (STEWART, 1991).

4.4.2 **Notas sobre determinismo e a DSCI**

A importância deste capítulo é dar um exemplo de sistemas onde imprecisões na determinação das condições iniciais, mesmo que mínimas, resultarão em dinâmicas completamente distintas e tornando-as essencialmente imprevisíveis. A propriedade DSCI é matemática e intrínseca aos sistemas caóticos (sistema de equações diferenciais não-lineares que possuem a propriedade DSCI) e, portanto, não pode ser atribuída a algum fator externo de natureza física. Segundo Ott (1993)

> [...] the complexity of the dynamics cannot be blamed on unknown extraneous experimental effects, as might be the case when dealing with an actual physical system. (OTT, 1993, p.1)

Se as propriedades matemáticas podem ser completamente atribuídas a sistemas físicos, então a propriedade DSCI dos sistemas caóticos coloca uma nova perspectiva para avaliar as simplificações e aproximações feitas nos modelos para as aplicações em engenharia e uma dificuldade adicional ao determinismo laplaciano.

Para as aplicações, pode implicar em erros significativos dependendo do sistema e das simplificações ou aproximações introduzidas (onde até o truncamento de dados pode resultar em erros relevantes), mas, também, fornece formas de tratar problemas não-lineares.

Para o determinismo laplaciano, demanda, necessariamente, a precisão infinita dos dados numéricos para que a determinação completa de estados futuros (ou passados) continue sendo uma possibilidade teórica. Caso fosse possível alcançar uma precisão infinita das condições iniciais, o determinismo, como capacidade de previsão, ainda se sustentaria. A impossibilidade ainda estaria em questões técnicas e operacionais para a obtenção dos dados, como aparelhos de precisão finita, dificuldade de acesso a todos os dados, etc.

Será que a precisão infinita das condições iniciais é algo possível em princípio e a impossibilidade de previsão completa viria apenas de questões técnicas e operacionais? Responder à possibilidade de previsão completa proposta pelo determinismo laplaciano é um dos objetivos desta tese.

5 A MÁQUINA DE TURING

A crise na teoria de conjuntos teve grandes impactos na lógica matemática, pois ela própria foi objeto de tratamento rigoroso, por ser um dos fundamentos da matemática. A máquina de Turing e a idéia de computabilidade inserem-se nesse contexto: o aprofundamento no conhecimento da lógica.

A máquina de Turing é um dos resultados mais notáveis da lógica e da matemática do século XX e cujas implicações repercutem nas mais diversas áreas. Um dos grandes avanços da lógica foi a percepção de seu caráter predominantemente sintático, em detrimento do caráter semântico (COSTA e DORIA, 1991). A lógica seria, então, essencialmente, um conjunto de regras, onde os significados dos enunciados particulares são praticamente irrelevantes nas deduções. As deduções são apenas manipulações de cadeias de símbolos feitas sob a égide de regras. A máquina de Turing foi resultado desta visão da lógica.

Como mencionado no capítulo 2, muitas matemáticas e muitas lógicas foram desenvolvidas no século XX. Associada à matemática "clássica" ou "standard" está a lógica "clássica", que será a lógica por trás de todas as discussões deste trabalho. Tal lógica segue dois princípios principais (COSTA, 2008):

1) **Lei da não-contradição**: dadas duas proposições contraditórias, onde uma é a negação da outra, uma delas é falsa.
2) **Lei do terceiro excluído**: de duas proposições contraditórias, uma é verdadeira.

Também mencionado no capítulo 2 e na nota de rodapé 7, uma outra lógica, a denominada lógica intuicionista, por exemplo, não admite a lei do terceiro excluído. Uma das conseqüências deste fato é que tal lógica não reconhece a validade de demonstrações pelo método indireto (ou demonstrações por absurdo).

5.1 ANTECEDENTES HISTÓRICOS

5.1.1 **Pequena digressão sobre os sistemas formais axiomáticos**

Aristóteles, que é considerado o criador da lógica formal, teria dito que era impossível discutir qualquer coisa se sempre se questiona tudo (perguntando sempre “por que?”). Era necessário partir de algum lugar, aceitar certas premissas, convencionar certas coisas para poder construir os raciocínios.

Acredita-se que Euclides (figura 7) foi influenciado por muitas idéias aristotélicas sobre lógica, ciência e, em particular, pela idéia de estabelecer premissas e construir raciocínios a partir delas, ao escrever seu famoso tratado de matemática intitulado “*Os Elementos*”. Neste tratado, são abordados diversos assuntos matemáticos, entre eles, a geometria plana. Em “*Os Elementos*”, Euclides efetua uma sistematização da geometria plana, que consistiu na proposição de 5 enunciados básicos a partir dos quais deduziria todas as suas implicações lógicas. Era justamente a idéia da construção da geometria a partir de certos fundamentos.

Como afirmara Aristóteles, era necessário partir de algo: os enunciados básicos não requereriam prova. Para tanto, os enunciados precisavam ser verdades evidentes ou premissas simplesmente aceitas[28]. Dos axiomas (ou postulados) podem ser deduzidas as suas consequências lógicas, as quais recebem o nome de teoremas.

Esta forma de sistematização do conhecimento é chamada de método axiomático. “*Os Elementos*” é o trabalho escrito, conhecido, mais antigo a usar formalmente tal método. Daí, também, o método axiomático ser denominado como organização euclidiana do conhecimento.

Historicamente, o método axiomático consolidou-se como a forma preferencial do conhecimento matemático. O ideal matemático de certeza se delineou mais concretamente com o modelo euclidiano de conhecimento. Ele reflete o desejo de um conhecimento certo (verdadeiro e preciso) e *a priori*.

[28] Quando o enunciado é uma verdade evidente recebe o nome de **axioma**. Quando o enunciado é questionável, mas é admitido como ponto de partida (premissa) para a construção de raciocínios, recebe o nome de **postulado** (do latim *postulátus*, que significa pedido e é entendido como “pedido para aceitar”). Na matemática atual, axioma e postulado são considerados sinônimos (BOYER, 1996).

5.1.2 **A lógica dentro da crise**

Como visto no capítulo 2, no começo do século XX, a matemática atravessava uma de suas grandes crises: o surgimento de paradoxos na teoria de conjuntos. No entanto, não foi apenas a teoria de conjuntos que trouxe problemas ao *status quo* matemático, outros desenvolvimentos ocorridos no século XIX levantaram muitas questões que desestabilizaram a matemática, sobretudo, do ponto de vista da lógica, pois questionaram antigas crenças. Nesse sentido, além da teoria de conjuntos foi de particular importância as geometrias não-euclidianas.

As geometrias não-euclidianas desenvolvidas por Johann Gauss (1777-1855), Janos Bolyai (1802-1860), Nikolai Lobachevsky (1792-1856) e Bernhard Riemann (1826-1866), colocaram em xeque a suposta verdade evidente dos postulados da geometria euclidiana, considerada a descrição fiel do espaço, uma descrição irretocável. Cada um destes matemáticos criou uma geometria diferente (pela alteração do postulado das retas paralelas da geometria euclidiana) e todas elas **logicamente** consistentes.

Como era possível haver mais de uma "verdade" sobre o espaço? Com as geometrias não-euclidianas, os matemáticos começaram a compreender que existia uma diferença crucial entre a idéia cotidiana de verdade e a de consistência lógica. Começou a se perceber que a questão do conteúdo dos axiomas (ou postulados), para a matemática como ciência, era algo secundário. Existe uma série de geometrias consistentes, não cabendo ao geometra decidir se o espaço segue alguma geometria particular ou diversas ou todas (isto pode ser de interesse dos físicos[29]), já que **todas** elas são de interesse matemático. Para a matemática, o importante passou a ser as deduções lógicas a partir de axiomas dados. A lógica na matemática não lidava mais com a **"verdade"**, mas com a **consistência**.

A matemática também se tornou mais abstrata e, assim, ficou evidente que as percepções comuns não eram árbitros confiáveis. Algo estranho ou inaceitável ao "senso comum" (como as geometrias não-euclidianas) podia ser perfeitamente consistente. Esse fato se confirmou com o advento da teoria de conjuntos, onde muitas de suas conclusões eram "contra-intuitivas", como, por exemplo, a parte poder ter o mesmo tamanho do todo, quando se lida com conjuntos infinitos.

[29] Einstein usou a geometria riemanniana para construir sua teoria da relatividade geral. A geometria riemanniana é uma geometria não-euclidiana e foi desenvolvida cerca de meio século antes da teoria da relatividade.

Foram os paradoxos da teoria de conjuntos que, de fato, deflagraram a crise, mas o caráter da crise (a convergência de todas essas percepções) fez com que os matemáticos voltassem sua atenção para os próprios fundamentos da matemática: no que e como ela se estruturava. Por isso, a própria lógica tornou-se objeto de investigação.

Para resolver a crise surgiram diversas tendências, sendo três as que tiveram maior destaque: a escola logicista, cujos maiores expoentes eram Bertrand Russell (1872-1970) e Alfred Whitehead (1861-1947), a escola intuicionista[30] representada por Luitzen Brouwer (1881-1966) e a escola formalista representada por David Hilbert (1862-1943). Todas estas escolas deram contribuições relevantes, ajudaram a direcionar os rumos da matemática e prezavam pelo rigor, no entanto, nas primeiras décadas do século XX, a escola formalista (e a figura de Hilbert) era a mais importante.

A escola formalista de Hilbert refletia o *main stream* matemático. O nome formalista vem do fato de Hilbert[31] desejar formalizar toda a matemática em termos axiomáticos, seguindo o modelo de Euclides e sua geometria. Sua proposta era postular um número finito de axiomas (não mais "verdades evidentes", mas enunciados abstratos de interesse puramente matemático) e regras de inferência bem definidas para obter todos os enunciados e, dessa forma, esgotar toda a matemática. Todos os enunciados matemáticos (inclusive os axiomas) seriam escritos numa linguagem formal precisa. Assim procedendo, acreditava que, além de resolver a crise e os paradoxos da teoria de conjuntos, daria fundamentos firmes e definitivos à matemática.

Hilbert tinha fé nessa abordagem e foi bastante ativo na consecução de um programa para a total formalização da matemática. No ano de 1900, em Paris, no II Congresso Internacional de Matemáticos (International Congress of Mathematicians), Hilbert apresentou uma lista de problemas (inicialmente com 10, mas que, pouco depois, chegou a 23) cuja intenção era resolver questões ainda em aberto e iniciar o programa formalista.

Para Hilbert não existia problema que não pudesse ser resolvido em matemática. Ele, certa vez, disse: "Wir müssen wissen. Wir werden wissen"[32].

[30] Foi da escola intuicionista que surgiu a lógica intuicionista e a matemática intuicionistas.
[31] Hilbert organizou a geometria euclidiana no formato que conhecemos hoje.
[32] "Nós devemos saber. Nós saberemos". Esta frase está escrita na lápide de Hilbert, na cidade de Göttingen, Alemanha.

5.1.3 **Requisitos para o sucesso do programa formalista**

O programa formalista partia do pressuposto de que a matemática podia ser totalmente formalizada. Hilbert, então, quis desenvolver um sistema plenamente formal, completamente regido por regras explícitas para excluir toda subjetividade ou ambiguidade. A subjetividade e a ambiguidade sempre foram fontes de erros e paradoxos.

Grosso modo, o sistema imaginado por Hilbert partiria de um conjunto finito de **axiomas** aos quais se aplicariam claros **princípios de inferência lógica** para obter **todos** os enunciados matemáticos.

Do ponto de vista do programa formalista, tal sistema formal precisava preencher os seguintes requisitos (CHAITIN, 1993):

1) **Consistência**: não se pode chegar a contradições dentro do sistema formal.
2) **Completude**: **todos** os enunciados matemáticos podem ser provados formalmente, partindo dos axiomas e usando os princípios de inferência lógica.
3) **Decidibilidade**: existe um **procedimento de decisão** que decida se um enunciado qualquer é "verdadeiro" ou "falso".

Figura 7 – Euclides de Alexandria (~325 a. C.– ~265 a. C.), autor de "*Os Elementos*"
(Fonte: http://www.joensuu.fi/mathematics/MathDistEdu/SemProd/Euclid.jpg)

5.1.3.1 Consistência e completude

As questões da consistência, completude e decidibilidade foram postas por Hilbert como problemas de sua lista de 23 problemas. Mais precisamente, no segundo problema e no décimo problema da lista. As questões de consistência e completude foram abordadas no segundo problema e a questão da decidibilidade foi abordada parcialmente no décimo problema[33].

O segundo problema da lista era provar a consistência dos axiomas da aritmética dos números naturais[34], pois Hilbert acreditava que a consistência de sistemas mais complicados poderia ser provada a partir de sistemas mais simples.

O segundo problema foi resolvido em 1931, pelo artigo *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I*[35], considerado o trabalho mais importante de Gödel, que demonstrou que, qualquer formalismo usado para axiomatizar a aritmética dos números naturais, não pode ser, simultaneamente, consistente e completo. Se alguma formalização da aritmética for consistente, então existem enunciados verdadeiros, que não podem ser formalmente provados.

Para ilustrar a situação, um exemplo de possível verdade indemonstrável é a **Conjectura de Goldbach**, que diz: "Todo número par maior que 2 é a soma de dois números primos". Até hoje, a conjectura tem se mostrado verdadeira (todo número par testado pode ser expresso pela soma de dois números primos), mas ainda não foi demonstrada. As conclusões de Gödel colocam em dúvida a possibilidade de prová-la.

Estes resultados foram inesperados e surpreendentes. De fato, tão inesperados, que, quando Gödel os apresentou em uma conferência em Königsberg, em 1930, não foi compreendido por nenhum dos ouvintes, à exceção de um, o matemático húngaro John von Neumann (1903-1957) (GOLDSTEIN, 2006). Especialmente, a questão da incompletude foi chocante. Existia a crença de que qualquer verdade poderia ser demonstrada, qualquer problema poderia ser resolvido. Seria apenas uma questão de tempo.

[33] A questão da decidibilidade foi claramente formulada apenas em 1928. Detalhes no subitem 5.1.3.2 e na seção 5.3.

[34] Os axiomas foram propostos pelo matemático italiano Giuseppe Peano (1858-1932).

[35] "Sobre as proposições formalmente indecidíveis do *Principia Mathematica* e sistemas relacionados". O termo "proposições indecidíveis", no título do artigo, significa que, dado um enunciado (proposição), não é possível decidir se ele é verdadeiro ou falso.

Gödel provou que nem toda verdade pode ser demonstrada, que nem todo problema pode ser resolvido. Mostrou que a idéia de verdade ia além da idéia de demonstração. Segundo Hofstadter (1999), a idéia de verdade é mais forte que a idéia de "provabilidade".

Segundo Nagel e Newman (2003, p. 56): "[o artigo de Gödel] demonstra uma limitação fundamental no poder do método axiomático". O método axiomático não é exaustivo.

A prova de Gödel foi um duro golpe no programa formalista de Hilbert. Dois dos três requisitos dos sistemas formais estavam comprometidos, mas ainda restava um: a decidibilidade.

5.1.3.2 Decidibilidade

O décimo problema da lista de Hilbert pedia um algoritmo que determinasse se uma equação polinomial diofantina com coeficientes inteiros tinha solução inteira. Era um problema particular, que foi estendido para que pudesse abranger sistemas formais genéricos, mas que trazia a essência da decidibilidade: um algoritmo (procedimento) de decisão.

O assunto da decidibilidade é importante, pois está diretamente relacionado com a máquina de Turing. Por isso, será desenvolvido mais detidamente. A seguir, serão introduzidos os conceitos de **algoritmo** (informal), **procedimento de decisão** e **problema de decisão**[36] para fechar com a máquina de Turing, que é o algoritmo formal.

[36] Procedimento de decisão e problema de decisão são dois conceitos diferentes.

5.2 O QUE É UM ALGORITMO?

A palavra algoritmo é uma corruptela do nome do matemático **al-Khowarizmi**[37] e se refere a procedimento, método ou receita. Um procedimento é entendido como uma regra constituída por um conjunto de passos bem definidos. Um algoritmo seria um método para obter uma resposta a uma questão matemática.

Tal receita seria aplicada a certos dados ou informações iniciais para alcançar certo resultado. Por exemplo, o **algoritmo de Euclides** é um procedimento (método ou receita) para determinar o máximo divisor comum (MDC) entre dois números naturais. Dados dois números naturais A e B ($A > B$) é aplicado o algoritmo para obter o MDC entre ambos. O algoritmo consiste em dividir A (dividendo) por B (divisor) e verificar se C (resto da divisão) é zero. Se C for zero, o processo acaba e o MDC é B. Senão, o número A é substituído por B (o divisor torna-se o novo dividendo) e B é substituído por C (o resto torna-se o novo divisor). Este último processo é repetido até que C se torne zero e sendo o B desse passo o MDC. A seguir é mostrado o fluxograma do algoritmo de Euclides:

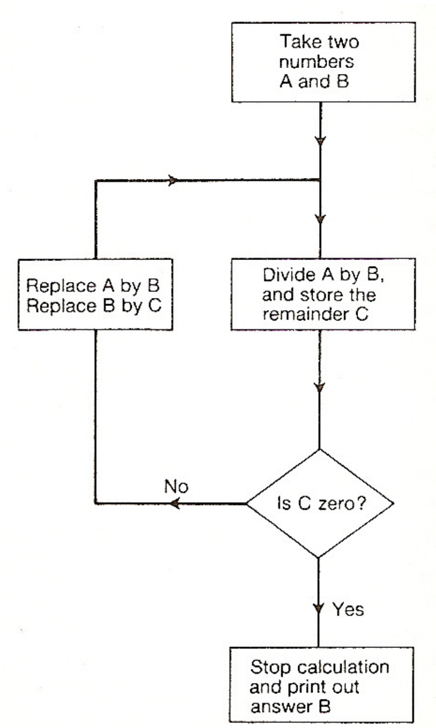

Figura 8 – Fluxograma do algoritmo de Euclides
(Fonte: PENROSE, 1999, p. 42)

[37] Do nome de al-Khowarizmi também derivou a palavra algarismo.

O algoritmo de Euclides implementado em linguagem C pode ser o seguinte:

```
#include <stdio.h>
main()
{
int a, b;
scanf ("%d %d", &a, &b);
do
      {
      r = a % b;
      a = b;
      b = r;
      }
while(r != 0);
printf ("%d\n", a);
}
```

Apesar da antiguidade da idéia de algoritmo, uma formulação precisa e rigorosa do conceito de algoritmo geral ocorreu apenas no século XX (PENROSE, 1999, p. 44). Somente com essa formulação rigorosa é que a implementação do algoritmo em linguagem C foi possível.

5.2.1 **Procedimentos de decisão**

Certo tipo de algoritmos recebe o nome de **procedimento de decisão**. Um procedimento de decisão é uma regra que decide (dá uma resposta sim ou não) sobre uma pergunta. Dada uma pergunta como entrada, estes algoritmos fornecem como saída uma resposta do tipo “sim” ou “não”.

Algoritmos desse tipo são comuns na matemática, mas, assim como o algoritmo de Euclides, são procedimentos informais, sem definição precisa e rigorosa.

Em engenharia elétrica são encontrados alguns procedimentos informais que podem ser enquadrados como procedimentos de decisão. A seguir serão mostrados alguns exemplos para fixar esta importante idéia.

5.2.1.1 Procedimentos de decisão em engenharia elétrica

Em engenharia, existem diversos procedimentos cujo objetivo é proporcionar uma decisão. É bom lembrar, no entanto, que estes procedimentos de decisão são algoritmos informais. Por exemplo:

1) Solubilidade de um sistema linear

Pergunta: Este sistema linear tem solução única?

$$S: \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Procedimento: Aplicar o teorema de Cramer, em um sistema linear *n* x *n* (*n* equações com *n* incógnitas). Através da aplicação do teorema pode-se saber *a priori* se o sistema é possível (tem solução) e é determinado (tem solução única). Dado o determinante do sistema (*D*), o sistema linear S é possível e determinado se, e somente se, $D \neq 0$.

Decisão: Sim.

Este procedimento de decisão pode mostrar por antecipação se vale a pena tentar buscar a solução do sistema linear.

2) Uso da teoria de circuitos elétricos

Pergunta: A teoria de circuitos elétricos pode ser usada em uma rede de distribuição, de frequência 60 Hz e com componentes de até 5ª harmônica (300 Hz), contida em um raio de 10 km (ORSINI, 1993)?

Procedimento: Aplicar a equação $d \ll \lambda_m/4$, onde d é a maior dimensão do sistema elétrico em questão e λ_m é o comprimento da onda eletromagnética de maior frequência do sistema a ser considerada. A teoria de circuitos pode ser usada quando a equação é satisfeita.

Decisão: Sim.

Mais uma vez, existe um procedimento de decisão que fornece uma resposta *a priori*. Neste caso, a adequação do uso de certa teoria e suas técnicas.

3) Estabilidade de sistema dinâmico

Pergunta: Este sistema dinâmico é instável (OGATA, 2003)?

$$s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 5 = 0$$

Onde s é uma variável complexa.

Procedimento: Aplicar o critério de estabilidade de Routh (algoritmo de Routh), que é um teste conclusivo sobre a estabilidade ao indicar se existem raízes instáveis em uma equação polinomial.

Decisão: Sim.

Nos sistemas de controle de malha fechada ou sistemas realimentados, o critério mais importante a ser verificado é o da estabilidade. Para o estudo de tais sistemas, é essencial saber, de antemão, se eles são estáveis ou não. Para as aplicações básicas, caso o sistema seja instável, ele pode ser descartado.

Um dos objetivos de um procedimento de decisão é evitar o desperdício de recursos e tempo. Para tanto, tal procedimento deve dar uma resposta *a priori*.

Pode valer a pena investir recursos e tempo em uma tarefa quando, *a priori*, há garantia de ser bem sucedido nela. Por outro lado, é conveniente não investir quando, *a priori*, há garantia de ser mal sucedido. Não perder tempo com uma missão impossível. Não procurar solução em um sistema linear se sabe de antemão que ela não existe. Não usar a teoria de circuitos quando se sabe, antecipadamente, que ela é inadequada. Não estudar um sistema dinâmico quando se sabe antes que ele é instável.

Quando não há decisão, o investimento tem retorno incerto. A dúvida de persistir ou não na tarefa é permanente.

Outro aspecto importante do procedimento de decisão é sua generalidade: as perguntas podem ser específicas (um sistema particular), mas o procedimento, em si, é genérico. Ele pode decidir sobre uma classe completa de perguntas (uma classe de sistemas). Um procedimento de decisão pode ser muito abrangente. Pode-se imaginar que, no limite, abrangeria qualquer enunciado matemático. Um procedimento totalmente geral. Esse era um dos sonhos de Hilbert.

5.3 PROBLEMA DE DECISÃO E A MÁQUINA DE TURING

Com a prática idéia de procedimento de decisão em mente, Hilbert propôs o *Entscheidungsproblem* (que significa "problema de decisão" em alemão), que era a generalização do décimo problema da lista de 1900. Essa forma mais completa veio apenas em 1928, no VII Congresso Internacional de Matemáticos em Bolonha (PENROSE, 1999 e SHALLIT, 1995). No mesmo ano foi publicado o livro *Grundzüge der theoretischen Logik* (Princípios de lógica matemática), de Hilbert e seu discípulo Wilhelm Ackermann (1896-1962), onde o *Entscheidungsproblem* é enunciado e aparece (traduzido para o inglês) como segue:

> The Entscheidungsproblem is solved when one knows a procedure by which one can decide in a finite number of operations whether a given logical expression is generally valid or is satisfiable. The solution of the Entscheidungsproblem is of fundamental importance for the theory of **all** fields, the theorems of which are at all capable of logical development from finitely many axioms. (SUTNER, 2008, p.3, negrito nosso)

Os termos "valid" e "satisfiable" foram cunhados na lógica. Um enunciado lógico é "válido" se ele é sintaticamente correto e é uma implicação lógica de outros enunciados. Em outras palavras, se o enunciado em questão segue e é obtido por um conjunto de regras explícitas. Por que se usa o termo "válido" e não o termo "verdadeiro" (e, reciprocamente, "inválido" e "falso")? Como visto, isso ocorreu, entre outras razões, porque "verdade" e "falsidade" tinham uma conotação, usada no cotidiano, que não fazia mais sentido na matemática abstrata.

O *Entscheidungsproblem*, portanto, é o problema de responder, se existe ou não, um procedimento de decisão muito geral, que decide se um enunciado **qualquer** é "válido" ou não. O *Entscheidungsproblem* admitia uma de duas respostas possíveis: sim ou não. Sim, caso exista pelo menos um procedimento que decida, dado um enunciado lógico qualquer, se ele é "válido" ou não. Não, caso não exista tal procedimento.

Para dar uma resposta positiva ao problema de decisão era necessário encontrar um conjunto de regras que decida a "validade" de qualquer enunciado lógico. Já, para fornecer uma resposta negativa era preciso mostrar que **não existe** procedimento de decisão. Mas, para mostrar a não existência de algo, é necessário saber exatamente o que é esse algo.

Soluções positivas a problemas de decisão com algoritmos informais são comuns (como visto, existe uma série deles usados em engenharia), no entanto uma definição vaga de algoritmo é insuficiente para dar soluções negativas, como explica claramente Davis:

> Positive solutions to decision problems occurs quite frequently in classical mathematics. To recognize such a solution as valid, it suffices to verify that the alleged algorithm really is an algorithm; this is ordinarily taken for granted and remains on the level of intuition. However, in order to obtain the *unsolvability* of a mathematical decision problem, this does not suffice. It becomes necessary to give an exact mathematical definition of the term "algorithm". (DAVIS, 1982, p. xvi, itálico do autor).

No contexto do *Entscheidungsproblem*, muitos trataram de encontrar uma resposta negativa (ou seja, demonstrar a insolubilidade do *Entscheidungsproblem*). Esse era um caminho mais curto e decisivo do que o de procurar um procedimento que pudesse responder sobre a "validade" de **qualquer** enunciado lógico, pois, caso tal procedimento não existisse, a procura nunca acabaria.

Em 1935, o *Entscheidungsproblem* continuava em aberto. Continuava em aberto, em parte, justamente porque não existia definição rigorosa do que seria um **procedimento**. Sem essa definição, era impossível dizer se tal procedimento não existia, já que não se sabia exatamente o que era.

Nesse ano, no King's College da Universidade de Cambridge, o professor Maxwell Newman (1897-1984) ministrou um curso sobre fundamentos da matemática. Entre os alunos estava o matemático Alan Turing (1912-1954). No curso, foram estudados os teoremas de incompletude de Gödel e foi introduzido o *Entscheidungsproblem* de Hilbert, o qual Turing decidiu resolver (HODGES, 1992).

Newman enfatizou o caráter mecânico do procedimento de decisão e isso inspirou Turing a desenvolver uma "máquina". Aparentemente, Turing usou como metáfora as máquinas de escrever (HODGES, 1992). Em 1936, Turing produz o famoso artigo *On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem*, onde propõe uma definição formal de algoritmo, que mais tarde seria conhecida como a **máquina de Turing**. Com uma definição rigorosa de procedimento em mãos, haviam condições para buscar uma solução negativa ao *Entscheidungsproblem.* E a resposta era realmente negativa: não existe algoritmo que possa decidir a “validade” ou “invalidade” de um enunciado lógico qualquer.

Este artigo, considerado um marco da lógica, foi pioneiro para a ciência da computação e seus impactos, talvez, tenham sido maiores que o artigo de Gödel sobre a incompletude de formalizações da aritmética. O fato é que Turing foi influenciado pelo trabalho de Gödel, mas seus resultados foram mais abrangentes. Eles são aplicáveis a qualquer conjunto de regras que possam ser expressas por linguagens formais. Os resultados de Gödel, por exemplo, são conseqüências imediatas das conclusões de Turing (CHAITIN, 1993).

Com a resposta negativa ao *Entscheidungsproblem*, o programa formalista, nos moldes de Hilbert, foi completamente enterrado.

5.4 DUAS FORMULAÇÕES DA MÁQUINA DE TURING

A máquina de Turing é uma “entidade” matemática puramente formal, mas que pode ser ilustrada por uma representação “física”. Segundo Hodges (1992), Turing pode ter se inspirado nas máquinas de escrever de sua mãe para idealizar sua noção de algoritmo. A noção de máquina ajuda na compreensão “intuitiva” do que seria um algoritmo matematicamente formal.

5.4.1 **A máquina de Turing “física”**

A máquina de Turing “física” é composta por uma fita de trabalho infinita, com infinitas células, dispostas lado a lado, e um cabeçote que pode escrever ou apagar símbolos na célula em que estiver localizado.

A figura 9 mostra um trecho da fita infinita da máquina de Turing:

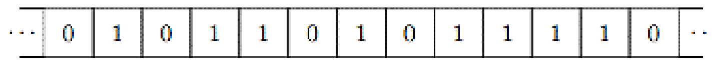

Figura 9 – Fita da máquina de Turing
(Fonte: http://plato.stanford.edu/entries/turing-machine/)

Se o cabeçote é fixo, a fita pode se deslocar para esquerda ou para a direita. Se a fita é fixa, o cabeçote se deslocaria para a direita ou para a esquerda.

Uma caricatura da máquina com cabeçote fixo é mostrado na figura 10, a seguir:

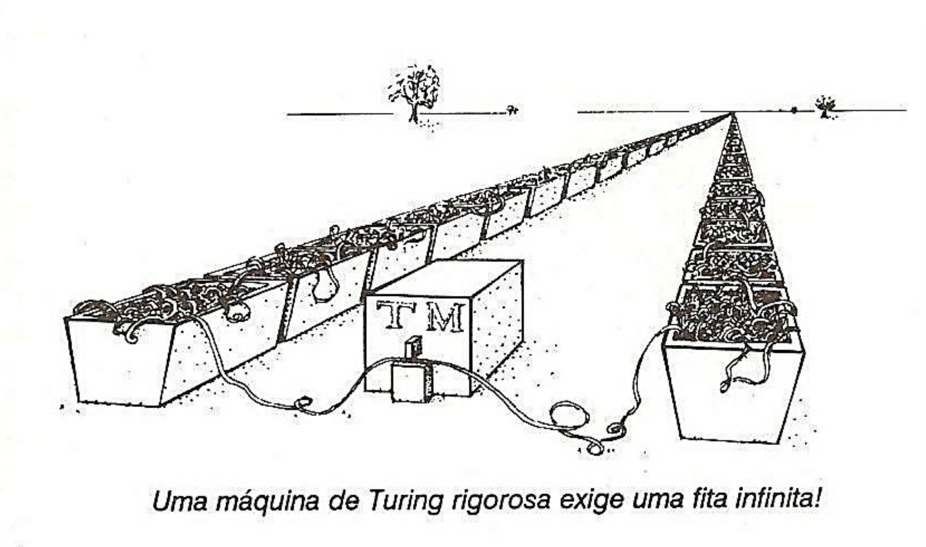

Figura 10 – Máquina de Turing "física"
(Fonte: A nova mente do rei, 1991, p. 37)

A máquina pode desempenhar rotinas (ou programas), que comandam as ações possíveis da máquina, ou seja, escrever, apagar, deslocar a fita (cabeçote) para a direita ou para a esquerda. A entrada (input) da máquina é o estado da fita antes de começar a desempenhar uma rotina. Se houver, a saída (output) da máquina é o estado final da fita após a rotina e é conhecido como **estado de parada** (*halt state*).

5.4.2 **A máquina de Turing formal**

Do ponto de vista formal, a máquina de Turing é um tipo de máquina de estados, que, em qualquer momento, está em um de seus finitos estados. As "instruções" ou "rotina" de uma máquina de Turing são as condições nas quais a máquina fará a transição de um estado para outro (SEP, 2004, verbete "Turing machines").

Em formalismo matemático (LEWIS; PAPADIMITRIOU, 1998 apud JOSÉ NETO, 2003, p. 91), a máquina de Turing pode ser representada como uma quádrupla[38]:

$$M = \{Q, \Sigma, \delta, s_0\}$$

Onde:

Q é o conjunto de estados (excluindo o estado de "halt" [h])

Σ é um alfabeto ou conjunto finito de símbolos

- Contendo o símbolo branco #
- Não contendo as indicações << e >> de movimento da fita

δ é uma função $\delta\colon Q\text{x}S \rightarrow (Q \cup \{h\})\text{x}(\Sigma \cup \{\ll, \gg\})$

s_0 é o estado inicial ($s_0 \in Q$) e s é um estado genérico

Se $s \in Q$, $a \in S$, $\delta(s, a) = (p, b)$, então M, estando no estado s, lendo a, irá ao estado p e então:

a) Se $b \in \Sigma$, escreve b no lugar de a, ou
b) Se $b \in \{\ll, \gg\}$, move o cabeçote para a esquerda ($\ll$) ou para a direita ($\gg$).

M pára se estado=h ou movimento impossível.

[38] Outras representações também são possíveis, como, por exemplo, quíntuplas.

5.5 FUNCIONAMENTO DA MÁQUINA DE TURING

Toda máquina de Turing tem o mesmo mecanismo. O que faz uma máquina desempenhar tarefas diferentes é a tabela de regras de transição (que pode ser vista como seu programa) e o estado inicial específico da máquina.

Um exemplo (LEWIS; PAPADIMITRIOU, 1998 apud JOSÉ NETO, 2003; SEP, 2004, verbete "Turing machines"): considerando $M_e = \{Q, \Sigma, \delta, s_0\}$ com $Q = \{s_0, s_1, s_2\}$, $\Sigma = \{0,1\}$, estado inicial s_0 e δ dado pela seguinte tabela:

s	σ	$\delta\ (s,\sigma)$
s_0	1	$(s_0, \gg)$
s_0	0	$(s_1, 1)$
s_1	1	$(s_1, \ll)$
s_1	0	$(s_2, \gg)$

Tabela 5.1 – Tabela de transição de estados ou função δ

A máquina M_e pára (estado de h ("halt")), pois chegou a um estado (s_2) onde não há mais regras a seguir.

A máquina de Turing M_e pode ser representada pela tabela 5.1, mas também pode ser representada por um diagrama de estados ilustrado pela figura 11.

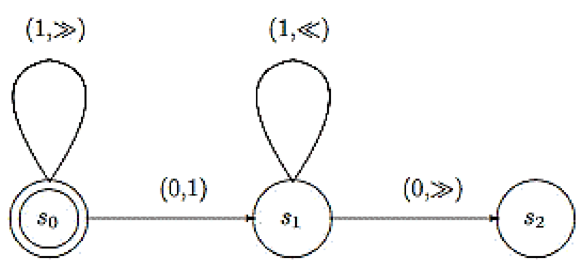

Figura 11 – Máquina de Turing M_e representada por um diagrama de estados
(Fonte: http://plato.stanford.edu/entries/turing-machine/)

Na figura 11, os círculos representam os estados, sendo o círculo duplo o estado inicial. As transições são representadas pelas flechas. Sobre as flechas existem "pares ordenados", onde, a "abscissa" é o símbolo que precisa ser lido para seguir aquela flecha específica e a “ordenada” é a ação que deve ser realizada quando a transição é feita. A ação pode ser tanto escrever (apagar) um símbolo como mover o cabeçote (fita) para a esquerda ou para a direita.

5.6 MÁQUINAS EQUIVALENTES E MÁQUINA DE TURING UNIVERSAL

É notável que uma máquina relativamente simples, que desempenha apenas 4 operações (escrever, apagar, desloca o cabeçote (fita) para a direita, desloca para esquerda), possa representar todo e qualquer algoritmo. Este resultado será abordado com maiores detalhes no capítulo 6 – Computabilidade, mas nos tópicos 5.6.1 – Máquinas equivalentes e 5.6.2 – Máquina de Turing Universal são mostrados fatos matemáticos marcantes que reforçam o caráter absoluto da máquina de Turing.

5.6.1 **Máquinas equivalentes**

Ao observar a formulação básica da máquina de Turing é possível imaginar que suas capacidades (entendidas como sendo a habilidade de resolver problemas (Turing-computabilidade[39]) independentemente do tempo que levaria) poderiam ser estendidas com mudanças em sua configuração. A aparente limitação de recursos da máquina de Turing básica (um único cabeçote, uma única fita, deslocamento unidirecional do cabeçote, etc.) sugere que o aumento, por exemplo, no número de cabeçotes ou de fitas poderiam incrementar as capacidades da máquina de Turing. Inesperadamente, no entanto, tais mudanças em nada alteram as capacidades da máquina de Turing.

Foi demonstrado que “fitas” n-dimensionais, número arbitrário de cabeçotes, movimento arbitrário do cabeçote, alfabeto finito arbitrário, máquinas de Turing não-determinísticas (não regidas rigidamente por tabelas de regras de transição) ou combinações das configurações anteriores são totalmente equivalentes à máquina de Turing básica da perspectiva da Turing-computabilidade. As mudanças mencionadas podem trazer ganhos em velocidade, por exemplo, mas não mais do que isso.

[39] A noção de Turing-computabilidade será detalhada no capítulo 6.

Existem certas mudanças que podem alterar as capacidades da máquina de Turing, como, por exemplo, não permitir que a máquina possa escrever na fita de trabalho (esta mudança retira a habilidade de memória da máquina, o que diminui suas capacidades). Qualquer mudança tentada apenas manteve ou diminuiu as capacidades da máquina, nunca aumentaram.

5.6.2 **Máquina de Turing Universal**

Cada máquina de Turing representa um algoritmo particular. Existe a chamada Máquina de Turing Universal (Universal Turing Machine – UTM), que pode simular qualquer máquina de Turing individual (um algoritmo específico), ou seja, qualquer algoritmo.

A existência de um algoritmo geral que pudesse emular qualquer outro algoritmo foi descoberta pelo próprio Turing em seu artigo *On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem*. Foi através do conhecimento da existência da UTM que se podia afirmar que não existia algoritmo que decidisse qualquer enunciado lógico-matemático (por exemplo, não há UTM que resolva o *halting problem*, não há UTM que compute todos os números irracionais).

As equivalências e a existência da UTM são indícios muito fortes de que o conceito de algoritmo e suas propriedades constituem resultados praticamente **absolutos**. O próximo capítulo explorará isto com a apresentação da **tese de Church-Turing**.

6 COMPUTABILIDADE

Quando Hilbert propôs o *Entscheidungsproblem*, em 1928, muitos se debruçaram sobre ele. Na década de 1930, desenvolveram-se independentemente diversas noções para a solução do *Entscheidungsproblem*. Muitas dessas noções giravam em torno da identificação do conceito de *função efetivamente calculável* (DAVIS, 1982), cujo intuito principal era determinar se existiriam problemas insolúveis em lógica "clássica" e matemática "clássica".

A noção de computabilidade era uma entre as diversas noções desenvolvidas. Logo, ela está ligada à existência ou não de solução a certos problemas lógicos e matemáticos.

6.1 A TESE DE CHURCH-TURING

Além da noção de computabilidade, as principais noções desenvolvidas na década de 1930 foram a *λ-definibilidade* de Alonzo Church (1903-1995), a *recursividade geral* de Jacques Herbrand (1908-1931)-Kurt Gödel (1906-1978)-Stephen Kleene (1909-1985), *1-definibilidade* e *binormalidade* de Emil Post (1897-1954), o trabalho de Andrey Markov (1903-1979), a própria *computabilidade* de Turing, entre outras (DAVIS, 1982). Apesar de terem sido desenvolvidas independentemente e de serem muito diferentes entre si, todas elas resultaram ser totalmente equivalentes.

A notável equivalência entre formulações independentes, a existência da UTM, que pode emular qualquer máquina de Turing e, como visto anteriormente, alterações visando aumentar o poder da máquina de Turing, em nada alteram sua capacidade computacional (no sentido de computabilidade), sendo todas igualmente equivalentes à máquina de Turing padrão, convenceram os lógicos de que se havia alcançado a noção fundamental de algoritmo formal e inspirou Alonzo Church a propor uma espécie de conjectura[40] chamada de tese de Church ou tese de Church-Turing. A tese diz o seguinte:

> Tese de Church: as máquinas de Turing são versões formais de algoritmos, e nenhum procedimento computacional é considerado um algoritmo a não ser que possa ser apresentado na forma de uma máquina de Turing. (LEWIS; PAPADIMITRIOU, 1998 apud JOSÉ NETO, 2003, p. 125)

[40] É um fato interessante que, ao longo da história da matemática, diversas conjecturas foram derivadas das evidências "empíricas" e cujas demonstrações ocorrem apenas posteriormente.

E por que a máquina de Turing foi escolhida se existem outras formulações (*cálculo λ* de Church, *funções recursivas* de Herbrand-Gödel-Kleene, *linguagens canônicas* de Post, *algoritmos* de Markov, etc.)? A formulação de Turing costuma ser a preferida, por ter um apelo mais "intuitivo", simples e direto. O seu argumento era considerado mais claro e fundamental que os demais. Este fato foi reconhecido por Church (SEP, 2002, verbete "The Church-Turing thesis") e, por isso, consignado em sua tese.

A tese não foi demonstrada, mas se considera pouco provável que exista algum modelo alternativo que execute alguma operação que não seja executável pelas máquinas de Turing (LEWIS; PAPADIMITRIOU, 1998 apud JOSÉ NETO, 2003). Até hoje, todo modelo proposto mostrou ser equivalente ou mais fraco (FLAKE, 1998). Um exemplo mais recente de modelo equivalente são os autômatos celulares (WOLFRAM, 1984).

Por conta da equivalência, uma máquina de Turing pode ser designada por diversos outros termos que lhe são sinônimos. Além do de algoritmo formal pode ser: método (procedimento) efetivo, método (procedimento) mecânico, método (procedimento) definido, etc.

Deve-se entender a existência de um método efetivo como a possibilidade de calcular algo. Se não houver tal método, o problema em questão não pode ser calculado e ele é considerado insolúvel. Por exemplo, sempre que houver um método efetivo (ou seja, uma máquina de Turing) para obter os valores de uma função matemática, a função pode ser calculada. Esta é uma forma de caracterizar o conceito de *função efetivamente calculável*, que são funções (matemáticas ou lógicas) que **podem** ser calculadas.

É bom esclarecer que o método é efetivo, não eficiente. Chega-se ao resultado, mas não necessariamente chega-se rapidamente. Os aspectos de velocidade são estudados pelo ramo da teoria da computação chamada complexidade computacional.

A noção de computabilidade é, sem exagero, uma das mais amplas e fundamentais de toda a matemática. Como destaca Rogers (1992):

> It has been remarked that this class [das funções computáveis] is one of the few *absolute* mathematical concepts to originate in work on foundations of mathematics. Where *absolute* means "existing apart from and independent of particular symbolic formulations". (ROGERS, 1992, p. 19, itálico do autor e adendo nosso)

Idéia reforçada por José Neto (2003):

> Conclui-se que as máquinas de Turing são os dispositivos computacionais abstratos mais gerais de que se dispõe, capaz de executar quaisquer computações e reconhecer quaisquer linguagens estruturadas como cadeias. (LEWIS; PAPADIMITRIOU, 1998 apud JOSÉ NETO, 2003, p. 123)

A tese de Church é um enunciado que faz afirmações somente para o domínio lógico-matemático. Existem extrapolações desta tese no domínio da física, como, por exemplo, a de Deutsch (1985), que não podem ser consideradas rigorosas. Inclusive, são classificadas como erros de interpretação da tese (SEP, 2002, verbete "The Church-Turing thesis").

6.2 A TURING-COMPUTABILIDADE

A noção de computabilidade está associada à formulação de Turing (assim como a *λ-definibilidade* está para o *cálculo λ* de Church e a *recursividade geral* está para as *funções recursivas* de Herbrand-Gödel-Kleene, *1-definibilidade* e *binormalidade* está para as *linguagens canônicas* de Post, etc.).

Pode-se dizer que **computabilidade** é a propriedade de entidades lógico-matemáticas (números, conjuntos, funções, sentenças em linguagens formais, etc.) de poderem ser calculadas por máquinas de Turing (ou, simplesmente, calculadas). Em outros termos, se um processo (cálculo de números, construção de conjuntos, expressões efetivas de funções, deduzir uma sentença, etc.) pode ser realizado por uma máquina de Turing, então tal processo pode ser chamado de **computável**, efetivamente calculável, recursivamente solúvel, etc. Em suma, ser computável é ser solúvel.

Os resultados de Turing (e das formulações equivalentes) mostram as limitações de **qualquer** linguagem formal e **qualquer** sistema axiomático. As conclusões de Gödel, por exemplo, apesar de bastante abrangentes, não eram um resultado geral (CHAITIN, 2000). Mais ainda, o trabalho de Gödel pode ser deduzido do de Turing.

6.3 O QUE É COMPUTÁVEL?

O principal resultado do artigo *On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem*, de Turing, é a existência de problemas incomputáveis, ou seja, problemas para os quais não existe máquina de Turing ou procedimento efetivo que os resolva. Eles são, assim, problemas insolúveis.

O artigo apresenta dois problemas incomputáveis: o *halting problem* e os números incomputáveis. Hoje são conhecidos inúmeros problemas incomputáveis e, como será visto ao longo deste trabalho, tais problemas são a regra e não a exceção dentro da matemática clássica.

É pela existência de problemas algoritmicamente insolúveis (ou incomputáveis), que a resposta ao *Entscheidungsproblem* é negativa: não existe procedimento de decisão (algoritmo/máquina de Turing) que decida qualquer enunciado matemático (no artigo de Turing, existem dois enunciados matemáticos que não podem ser decididos: o *halting problem* e os números incomputáveis).

Uma das implicações do artigo de Turing é o fato de que é impossível saber *a priori* que enunciados podem ser formalmente demonstrados.

O fato de não haver um procedimento que resolva todos os problemas, não exclui a possibilidade de solução de casos particulares.

A seguir serão discutidos a computabilidade de números, funções, conjuntos e linguagens formais.

6.3.1 **Números computáveis e incomputáveis**

O conjunto de todas as máquinas de Turing é enumerável, logo existe uma quantidade enumerável de números reais que têm descrição algorítmica ou lei de formação. Estes são números computáveis.

Por outro lado, existe uma infinidade não-enumerável de números reais. Logo, existe uma infinidade não-enumerável de números reais que não admitem descrição algorítmica e, portanto, são incomputáveis.

A demonstração desses fatos usa o "argumento diagonal" de Cantor e é análoga à demonstração da não-enumerabilidade dos números irracionais. Cria-se uma lista onde são alocados todos os algoritmos possíveis ao lado esquerdo e números irracionais, entre 0 e 1, ao lado direito. Esta demonstração foi feita, pela primeira vez, por Turing (1937a).

Totalidade dos algoritmos	**Números irracionais entre 0 e 1**
Algoritmo (MT) 1	$0.\mathbf{x_{11}}\, x_{12}\, x_{13}\, x_{14}...$
Algoritmo (MT) 2	$0.x_{21}\, \mathbf{x_{22}}\, x_{23}\, x_{24}...$
Algoritmo (MT) 3	$0.x_{31}\, x_{32}\, \mathbf{x_{33}}\, x_{34}...$
Algoritmo (MT) 4	$0.x_{41}\, x_{42}\, x_{43}\, \mathbf{x_{44}}...$
⋮	⋮

Lista 6.1 – Tentativa de bijeção entre todos os algoritmos (máquinas de Turing (MT)) possíveis e o conjunto dos números irracionais entre 0 e 1

A seguir será feita uma apresentação mais detalhada do ℝ, seus subconjuntos, sua computabilidade e, quando forem apresentados os números reais normais, o motivo para a existência da incomputabilidade.

6.3.1.1 Números racionais e irracionais

Uma forma de dividir o ℝ é pela racionalidade de seus números. A união do ℚ com o conjunto dos números irracionais é o próprio ℝ.

Recordando, ℚ (de quociente) é o conjunto dos números racionais, que são todos os números que podem ser representados na forma a/b (que é uma fração ou razão e, daí, o nome racional) onde a e b são números inteiros e $b \neq 0$. Todo número racional tem expansão decimal finita ou periodicamente infinita (⅓=0,333333...) (PENROSE, 1999).

O conjunto dos números irracionais é formado por números que não podem ser representados por razões (e daí seu nome). São exemplos de números irracionais o $\sqrt{2}$ (1,414213...), o $\sqrt{3}$ (1,732050...), o número áureo $((1+\sqrt{5})/2)$, o número de Euler (e) (2,718281...), o π (3,141592...), etc.

Todo o ℚ é computável.

Uma infinidade contável de números irracionais é computável. São exemplos disso o π, o e, o $\sqrt{2}$, o $\sqrt{3}$, etc.

O π[41] pode ser calculado com precisão arbitrária (no sentido de que o único gargalo para obter infinitas casas decimais é o tempo), através do seguinte algoritmo:

$$\pi = 4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$$

O número de Euler (e) também tem seu algoritmo:

$$e = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

Por outro lado, existe uma infinidade incontável de números irracionais que não têm um algoritmo correspondente, ou seja, são impossíveis de serem descritos algoritmicamente e, assim, são números incomputáveis.

Este é um dos pontos de vista que mostra a disparidade entre o tamanho do conjunto dos números computáveis e o tamanho do conjunto dos números incomputáveis. São conjuntos de cardinalidade infinita diferente. Logo, apenas uma pequeníssima parte do $\mathbb{R}$ é computável estando a grande maioria além de qualquer descrição algorítmica.

6.3.1.2 Números algébricos e transcendentais

Outra forma de classificar os números reais é distingui-los pela sua transcendentalidade. Ou seja, dividi-los entre números algébricos e números transcendentais. A união do conjunto dos números algébricos com o conjunto dos números transcendentais, também, é o próprio $\mathbb{R}$.

Números algébricos são as raízes de polinômios em uma variável, não-nulos e de coeficientes inteiros. Assim, números algébricos são as raízes reais da seguinte equação (CHAITIN, 2009):

[41] A título de curiosidade, existem recordes mundiais para a determinação da expansão decimal de alguns números, tais como o π e o número de Euler. Até outubro de 2010, o recorde para o π era de, aproximadamente, $5*10^{12}$ casas decimais (Fonte: http://noticias.uol.com.br/ultnot/cienciaesaude/ultimas-oticias/afp/2010/08/05/engenheiro-japones-diz-ter-calculado-numero-recorde-de-casas-decimais-do-pi.jhtm).

$$ax^n + bx^{n-1} + \cdots + px + q = 0 \quad \mathbf{(6.1)}$$

Onde:

$n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 0$

$a, b, ..., p, q$ são os coeficientes inteiros

x é um número real algébrico (se a eq.**(6.1)** for satisfeita)

Exemplos:

São números algébricos as raízes reais das seguintes equações:

$$x^3 + 5x^2 + 3x - 4 = 0$$
$$x^2 - 2x + 4 = 0$$
$$x^2 - 2 = 0$$

Todo o $\mathbb{Q}$ e alguns irracionais, como $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, o número áureo, etc., são números algébricos.

Se um número não é algébrico, então ele é transcendental.

A transcendentalidade está ligada à não-construtividade de certos números, no sentido de que não podem ser obtidos através de construções geométricas feitas com régua e compasso (ao contrário, por exemplo, da $\sqrt{2}$, que é a medida da diagonal de um quadrado de lado unitário, da $\sqrt{3}$, que é a medida da diagonal de um cubo de aresta unitária, do número áureo, usado para avaliar se certas medidas geométricas são harmoniosas esteticamente entre si, etc.).

São exemplos de números transcendentais, o π e o número de Euler (e). Todo número transcendental é irracional, mas nem todo irracional é transcendental. Em outras palavras, o conjunto dos números transcendentais é um subconjunto próprio do conjunto dos números irracionais.

Os números algébricos constituem uma infinidade contável. Todos os números algébricos são computáveis.

Os números transcendentais constituem uma infinidade incontável. Ou seja, existe uma infinidade incontável de números transcendentais incomputáveis. Há, no entanto, aqueles que são computáveis, como é o caso de π e do número de Euler (e).

6.3.1.3 Números reais simplesmente normais e absolutamente normais

Uma terceira forma de classificar os números reais é pela sua normalidade. A união do conjunto dos números normais com o conjunto dos números não-normais é, também, o próprio $\mathbb{R}$.

A normalidade é um conceito particularmente importante para este trabalho, pois fornece os motivos pelos quais a incomputabilidade ocorre.

O matemático francês Émile Borel (1871-1956) introduziu o conceito de número real normal em 1909 e desenvolveu importantes considerações sobre tais números.

As definições de número real normal e número real absolutamente normal são dadas a seguir, primeiramente de forma simplificada e depois de forma mais completa.

Definição 6.1: Seja α qualquer número real no intervalo [0,1], α é **simplesmente normal** (ou normal) na base b se para qualquer dígito d na base b vale (BECHER; FIGUEIRA; PICCHI, 2007):

$$\lim_{R\to\infty} \frac{S(\alpha, b, d, R)}{R} = \frac{1}{b} \quad \mathbf{(6.2)}$$

Onde:

b é a base (por exemplo, $b = 2$ é a base binária, $b = 10$ é a base decimal)

d é um dos dígitos de certa base (por exemplo, na base 2, $d \in \{0,1\}$ e, na base 10, $d \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$)

$S(\alpha, b, d, R)$ é o número de ocorrências do dígito d nos primeiros R dígitos após o ponto fracionário na expansão de α na base b

Por exemplo, tomemos um número real β na base 10 e o dígito 0. Aplicando a eq. **(6.2)**, obtém-se:

$$\lim_{R\to\infty} \frac{S(\beta, 10,0, R)}{R} = \frac{1}{10}$$

Se o dígito 0 ocorrer 10% das vezes em toda a expansão decimal e se o mesmo ocorrer para os dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, então β será normal na base 10.
Um exemplo de número real normal na base 10 é o número de Champernowne que é 0,1234567891011121314...

Definição 6.2: Um número α é **absolutamente normal** se for normal para toda base $b \geq 2$.

Um número real absolutamente normal é aquele que é normal em qualquer base $b \geq 2$, o que inclui a base 10.
Apenas com o intuito de fixar o conceito, aplica-se novamente a eq. **(6.2)**, só que agora para a base binária ($b = 2$):

$$\lim_{R\to\infty} \frac{S(\beta, 2, 0, R)}{R} = \frac{1}{2}$$

Se o dígito 0 ocorrer 50% das vezes na expansão binária (neste caso, o dígito 1 teria necessariamente uma incidência de 50% também), então β será normal na base 2. Se β for normal para todas as demais bases (além da 2 e da 10), então ele é um número absolutamente normal.
Um exemplo de número absolutamente normal é o número Ω de Chaitin.

A equação mais geral para determinação da normalidade é a seguinte:

$$\lim_{R\to\infty} \frac{S(\alpha, b, \gamma, R)}{R} = \frac{1}{b^{|\gamma|}} \quad \mathbf{(6.3)}$$

Onde:
b é a base
$|\gamma|$ é o comprimento da cadeia de dígitos
$S(\alpha, b, \gamma, R)$ é o número de ocorrências da cadeia γ nos primeiros R dígitos após o ponto fracionário na expansão de α na base b
A diferença da eq. **(6.3)** para a eq. **(6.2)** é a introdução de uma cadeia γ e seu comprimento $|\gamma|$, pois para que um número real seja normal em certa base (número simplesmente normal), além

da necessidade dos dígitos individuais terem a mesma incidência porcentual, é preciso que todas as cadeias de números também estejam igualmente distribuídas.

Por exemplo, para um número na base decimal, cadeias distintas de dois dígitos (00, 01, 02, ..., 97, 98, 99) devem ocorrer com frequência de 1%, cadeias distintas com três dígitos (000, 001, ..., 998, 999) devem ocorrer 0,1% e assim por diante. A distribuição de todos os dígitos e de todas as cadeias de dígitos é totalmente equiprovável. Dessa forma, não há qualquer padrão na constituição desse número, nessa base.

Se isso ocorrer para todas as bases, esse será um número absolutamente normal: um número em que não há padrão em nenhuma de suas representações possíveis.

Os números reais absolutamente normais possuem constituição total e intrinsecamente aleatória, onde nenhum padrão pode ser encontrado. Por essa razão, nenhum algoritmo pode computá-los. São números incomputáveis, pois nenhum conjunto de regras é capaz de descrever algo que não possua qualquer padrão.

Com o conceito de número real normal, Borel obteve um resultado notável: demonstrou que a probabilidade de que um número real no intervalo [0,1] seja absolutamente normal é 1 (100%) e, reciprocamente, a probabilidade de que um número real no intervalo [0,1] seja computável (cardinalidade $\aleph_0$) é 0 (0%). Os números naturais, inteiros e racionais são números não-normais.

O conjunto de todos os números computáveis tem a mesma cardinalidade do $\mathbb{N}$ e, portanto, estes números distribuem-se de forma discreta pela reta real. Ou seja, esta é outra forma de mostrar como os números incomputáveis (cujo conjunto tem cardinalidade $\aleph_1$) formam a esmagadora maioria dos números reais.

A figura 12 proporciona uma noção gráfica da distribuição de números computáveis e números incomputáveis dentro do conjunto dos números reais. Em termos da teoria da medida, os números computáveis possuem medida nula, já que se tratam de elementos discretos, podendo ser entendidos como meros pontos e sendo, portanto, carentes de extensão.

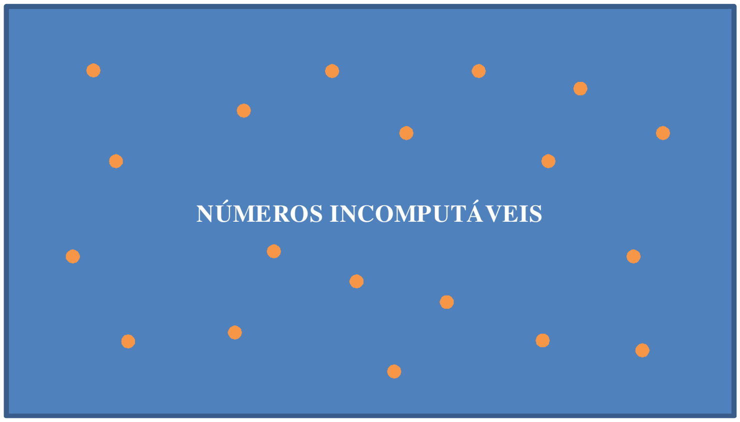

Figura 12 – Distribuição no ℝ de números computáveis (pontos laranjas) e incomputáveis (plano azul)

Resumindo a computabilidade dos números reais temos a seguinte tabela:

Número	Computável	Incomputável
Racional	$\aleph_0$	-
Irracional	$\aleph_0$	$\aleph_1$
Algébrico	$\aleph_0$	-
Transcendental	$\aleph_0$	$\aleph_1$
Absolutamente normal	-	$\aleph_1$

Tabela 6.1 – Diferentes classificações dos números reais e sua distribuição em termos de computabilidade

A completa aleatoriedade ou completa falta de padrão são o motivo da incomputabilidade. Esta conclusão não se restringe aos números, mas vale para diversas entidades lógico-matemáticas.

6.3.2 **Conjuntos computáveis e incomputáveis**

Do ponto de vista algorítmico, conjuntos com números irracionais são intrinsecamente problemáticos (no sentido de seus próprios elementos serem majoritariamente incomputáveis), então trataremos de conjuntos que tem como elementos números naturais (ou racionais). Será visto que, mesmo nestes últimos, existem também importantes definições para conjuntos computáveis e conjuntos incomputáveis. Estes fatos estão intimamente relacionados com as funções f: $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.

A seguir, alguns fatos sobre a computabilidade de conjuntos com cardinalidade $\aleph_0$:

a) Existem subconjuntos de ℕ que não podem ser descritos por algoritmos. Isso se deve ao fato de que o conjunto de todos os subconjuntos de ℕ tem a cardinalidade do conjunto potência de ℕ, ou seja, $\mathbf{card}\, P(\mathbb{N}) = 2^{\aleph_0}$. Logo, a grande maioria dos subconjuntos de ℕ estão além de descrições por máquinas de Turing.
b) Existem conjuntos que são completamente computáveis (*conjuntos recursivos*) e outros que são parcialmente computáveis (*conjuntos recursivamente enumeráveis*).

E o que são *conjuntos recursivos* e *conjuntos recursivamente enumeráveis*?
Dado um subconjunto **A**, próprio ou impróprio, de ℕ ($\mathbf{A} \subseteq \mathbb{N}$):

Definição 6.3: Diz-se que **A** é um ***conjunto recursivamente enumerável*** se existe um algoritmo que, dada a sequência de todos os números naturais como *input*, gerará uma lista com todos os elementos de **A** (COSTA; DORIA,1991).

Definição 6.3 alternativa: **A** é um *conjunto recursivamente enumerável* se existe uma função recursiva *a*(*n*) (bijetora) que enumera todos os elementos de **A** (POUR-EL; RICHARDS, 1981).

Exemplos (FLAKE, 1998):
O conjunto dos números de Gödel[42] de todos os programas que páram.

Para um número de Gödel dado, é possível constatar se o programa a ele associado **pára**.

Definição 6.4: Diz-se que **A** é um ***conjunto recursivo*** se, para **qualquer** $a \in \mathbb{N}$, existe um algoritmo que decida se $a \in \mathbf{A}$.

[42] O número de Gödel é um número natural que é o resultado de uma codificação. Assim, por exemplo, é possível associar a cada número de Gödel uma, e só uma, máquina de Turing. É possível listar todas as máquinas de Turing pelo seu número de Gödel correspondente, mas não é possível dizer quais são aquelas máquinas que eventualmente páram.

Exemplos (PENROSE, 1999):

- Qualquer conjunto finito é recursivo.
- O conjunto dos números pares.
- O conjunto dos números ímpares.
- O conjunto dos números primos.
- O conjunto dos quadrados de números naturais.

Quando tanto um conjunto **X** como seu complemento $\dot{\mathbf{X}}$ (por exemplo, o conjunto dos números pares e o conjunto dos números não-pares (também conhecidos como ímpares)) são recursivamente enumeráveis, então **X** é um conjunto recursivo (PENROSE, 1999, p. 157).

A diferença essencial entre estes dois tipos de conjunto é que no *conjunto recursivo*, dado um elemento, pode-se decidir se ele **pertence** ou se ele **não pertence** a um certo conjunto. Já no *conjunto recursivamente enumerável*, apenas se pode responder se um dado elemento **pertence** a um certo conjunto, sendo impossível afirmar que ele **não pertence** (a não-pertinência fica em aberto). Um dos aspectos mais problemáticos dos conjuntos recursivamente enumeráveis é que a verificação de pertinência pode levar tempo infinito, pois talvez seja necessário fazer a busca exaustiva em um conjunto infinito!

Um exemplo de aplicação destes conceitos é a classificação de teorias formais (uma linguagem[43] e um conjunto de axiomas). Se o conjunto de todos os teoremas (codificados[44]) $\boldsymbol{Teo_T}$ de uma teoria formal $\boldsymbol{T}$ for recursivamente enumerável:

$\boldsymbol{T}$ será uma teoria **decidível** se $\boldsymbol{Teo_T}$ for um conjunto recursivo.

$\boldsymbol{T}$ será uma teoria **indecidível** se $\boldsymbol{Teo_T}$ for um conjunto não-recursivo.

Ou seja, é possível dar o veredicto se uma certa sentença é um teorema, se houver algoritmo que decida a pertinência **e** a não-pertinência dela ao conjunto $\boldsymbol{Teo_T}$. Caso contrário, seria necessário esperar (talvez, infinitamente) aparecer o teorema na saída da máquina de Turing, já que $\boldsymbol{Teo_T}$ é recursivamente enumerável.

---

[43] Mais detalhes sobre linguagens formais serão vistos mais adiante. De qualquer maneira, este conhecimento não é requisito para compreender o exemplo.

[44] Da mesma maneira que é possível associar um, e só um, número natural a cada máquina de Turing, é possível associar um, e só um, número natural a uma frase ou palavra. Para tanto é necessária uma codificação conveniente (que pode ser por números de Gödel, também), que transforme a frase em um número natural (a transformação precisa ser biunívoca para eliminar qualquer ambiguidade).

Existem conjuntos que não são recursivamente enumeráveis apesar de conter uma infinidade contável de elementos. Um exemplo é o conjunto dos números computáveis. Este conjunto não pode ser efetivamente enumerado (MINSKY, 1969).

Resumindo a computabilidade de conjuntos cujos elementos são números naturais (racionais):

Conjunto	Computável	Incomputável
Todos os subconjuntos de $\mathbb{N}$ ($\mathbf{card}\ P(\mathbb{N}) = 2^{\aleph_0}$)	$\aleph_0$	$\aleph_1$
Recursivo	$\aleph_0$	-
Recursivamente enumerável	$\aleph_0$	-

Tabela 6.2 – Diferentes tipos de conjuntos e sua distribuição em termos de computabilidade

6.3.3 **Funções computáveis e incomputáveis**

Dados alguns problemas suscitados pelo uso de grandezas contínuas em física (como a existência de grandezas quantizadas, questionamentos sobre escalas espaciais e temporais arbitrariamente pequenas, etc.) e, em anos recentes, diversas correntes filosóficas que defendem, em diferentes graus, a idéia de que o "universo" seria um "grande computador", o *pancomputacionalismo ôntico* (SEP, 2010, verbete "Computation in physical systems"), reforçaram movimentos para a adoção de escalas discretas. As definições e resultados mostrados a seguir sugerem que, mesmo que sejam adotadas grandezas discretas em física, haveriam problemas ligados à incomputabilidade. Por quê?
Retomando algumas definições do capítulo 2 para discutir as noções de funções computáveis e incomputáveis.

Definição 2.4: Qualquer subconjunto **S** de **A** × **B** é chamado de relação de **A** para **B**.

Definição 2.6: Uma **função** ou **mapeamento** f do conjunto **X** no conjunto **Y**, denotado por f: **X** → **Y**, é uma relação de **X** para **Y** com a propriedade que para cada $x \in$ **X** existe um único $y \in$ **Y** tal que $(x, y) \in f$.

Agora uma definição formal do seria uma função Turing-computável ou simplesmente computável:

Definição 6.5: Uma função *f*(*x*) será dita Turing-computável se seu valor pode ser computado por alguma máquina de Turing T_f cuja fita está inicialmente em branco exceto por alguma representação padrão do argumento *x*. O valor de *f*(*x*) é o que permanece na fita quando a máquina pára (MINSKY, 1969, p. 135).

Definição 6.5 alternativa (Grzegorczyk): A função $\varphi(x)$ é computável se, e somente se:

a) φ mapeia toda sequência recursivamente enumerável de racionais $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$ em uma sequência recursivamente enumerável de reais $\{\varphi(t_n)\}$.
b) φ é contínua.

O conjunto de todas as funções do conjunto dos números naturais nos números naturais (*f*: ℕ→ℕ) tem a cardinalidade do contínuo. Pela def. **6.5**, uma função é Turing-computável se ela está associada a, pelo menos, uma máquina de Turing. Como a totalidade das máquinas de Turing constitui uma infinidade enumerável, somente uma ínfima parte dessas funções é computável quando comparado ao número total de funções de ℕ→ℕ. Isso significa que, mesmo em domínios discretos, existe o problema da incomputabilidade.

O conjunto de todas as funções **contínuas** do conjunto dos números reais nos números reais (*f*: ℝ→ℝ) também tem a cardinalidade do contínuo. O conjunto de todas as *f*: ℝ→ℝ (contínuas ou não) tem a cardinalidade do conjunto potência do ℝ, ou seja, $\mathbf{card}\, P(\mathbb{R}) = 2^{\aleph_1}$. Como, aqui, é assumida a "hipótese do *contínuo* generalizada", então $\mathbf{card}\, P(\mathbb{R}) = 2^{\aleph_1} = \aleph_2$.

Além do problema da insuficiência de algoritmos frente ao número de funções, está o fato de que para cada função pode haver mais de um algoritmo equivalente. Dois algoritmos são ditos **equivalentes** se eles definem a mesma função (MINSKY, 1969). Ou seja, apesar de serem regras distintas, dado um mesmo domínio, sua imagem é idêntica. Por exemplo (COSTA; DORIA,1991): $f(x) = 0$ e $g(x) = x\cos(\pi/2)$ são regras diferentes que representam exatamente a mesma função (a função nula para qualquer $x \in \mathbb{R}$). Determinar, no caso geral, quais regras (algoritmos) são equivalentes para uma dada função é um problema indecidível. Além disso, para todo algoritmo, existem infinitas máquinas de Turing equivalentes[45].

Recapitulando, conclui-se que, em termos de funções, há problemas indecidíveis (incomputáveis):

a) A grande maioria das funções não pode ser representada por algoritmos, sejam elas em $\mathbb{N}$ ou em $\mathbb{R}$.
b) Existem algoritmos equivalentes para uma mesma função:
   - No caso geral, não é possível decidir se duas regras são equivalentes.
   - Por outro lado, se há duas ou mais regras que representam a mesma função, por que preferir uma em detrimento de outra[46]?

Resumindo a computabilidade de diversos tipos de funções:

Função	Computável	Incomputável
EDO	$\aleph_0$	$\aleph_1$
EDP	$\aleph_0$	$\aleph_1$
Todas as funções f: $\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{N}$	$\aleph_0$	$\aleph_1$
Todas as funções f: $\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ contínuas	$\aleph_0$	$\aleph_1$
Todas as funções f: $\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$	$\aleph_0$	$\aleph_2$

Tabela 6.3 – Diferentes tipos de funções e sua distribuição em termos de computabilidade

Estes fatos são da maior relevância para este trabalho, pois tanto as leis matemáticas da física, como grande quantidade de modelos feitos em engenharia são desenvolvidos no domínio do $\mathbb{R}$ ou do $\mathbb{R}^n$. Assim sendo, envolve questões numéricas, questões com relação às equações diferenciais e funções contínuas e descontínuas em geral. Mesmo a possibilidade de uso de grandezas discretas pode encontrar diversos problemas do ponto de vista da computabilidade. Desta forma, a defesa do *pancomputacionalismo ôntico* precisa ser bastante mais elaborada do que aquelas presentes nas referências tradicionais do assunto.

[45] Informação fornecida pelo professor João José Neto em comunicação pessoal, São Paulo, em 8 de julho de 2011.

[46] Em ciências, existem critérios, como a *Navalha de Ockham* (critério de simplicidade), por exemplo, que tentam justificar escolhas de certas "leis" em detrimento de outras, mas, em matemática, qualquer uma das funções pode ser de interesse.

E a questão aberta no item 2.4.1: será a crença comum de que o que definiria uma função é uma equação, fórmula, regra ou expressão analítica qualquer é equivalente à definição formal de função (def. **2.6**)? O item 6.3.3 encaminha a resposta a esta pergunta, no entanto o item 6.3.4 fecha os requisitos para responder adequadamente a esta interessante indagação.

6.3.4 **Tópicos de linguagens formais e sua computabilidade**

Para ilustrar a abrangência da máquina de Turing, se pode citar sua capacidade de manipular **qualquer** alfabeto finito e o respectivo conjunto de cadeias resultantes.

Como visto no capítulo anterior, **um alfabeto é um conjunto finito de símbolos** e, aqui, designado pela letra grega Σ. Exemplos de alfabetos que a máquina de Turing pode manipular:

$\Sigma = \{0, 1\}$, alfabeto binário, usado normalmente pelos computadores.

$\Sigma = \{a, b, c, d, ..., z\}$, alfabeto das letras minúsculas da língua portuguesa.

$\Sigma = \{f, (,), x, +, -, *, /, ..., 0, 1, 2, 3, ..., 9\}$, alfabeto com símbolos matemáticos.

Enfim, qualquer conjunto finito de símbolos.

Com os elementos dos alfabetos podem-se formar cadeias de símbolos. O conjunto de todas as cadeias possíveis de um dado alfabeto Σ é designado por Σ^*.

Um exemplo de Σ^* do alfabeto $\Sigma = \{a, b, c, d, ..., z\}$ é sugerido pela lista a seguir:

a
aa
aaa
...
b
bb
bbb
...
ab
abab
ababab
...
a matematica e legal
...
...
...

Lista 6.2 – Conjunto de todas as cadeias possíveis (Σ^*) do alfabeto $\Sigma = \{a, b, c, d, ..., z\}$

As cadeias que são consideradas válidas dependem de uma sintaxe e uma gramática, que são regras de associação e manipulação de símbolos e cadeias. A obtenção de cadeias derivadas logicamente de outras depende dessas regras. Todas as manipulações possíveis são aquelas realizadas por máquinas de Turing. Uma linguagem é definida como sendo um certo subconjunto de Σ^*.

Independentemente do Σ (conjunto de letras, símbolos, etc.) em questão (desde que seja finito), o Σ^* é um conjunto enumerável. Todas as formulações textuais de máquinas de Turing são um subconjunto de Σ^*. E, como todas as formulações textuais formam um conjunto infinito, elas constituem, também, um conjunto enumerável. Esta é uma forma de mostrar que o conjunto formado por todas as máquinas de Turing é enumerável.

Para a máquina de Turing, não importa qual seja o Σ particular, porque, como mencionado, Σ^* é um conjunto enumerável para qualquer Σ finito. Deste fato segue que é possível associar, dois a dois, os elementos de distintos Σ^* (cada Σ^* formado a partir de diferentes Σ) por uma bijeção. Assim, existem muitas formas equivalentes de representação. Por exemplo, o alfabeto binário é equivalente ao alfabeto da língua portuguesa. A escolha do alfabeto binário para os computadores está ligada a questões tecnológicas e não constitui uma limitação no que é possível representar formalmente (as cadeias seriam apenas mais longas).

Um Σ^* pode incluir todas as palavras, todas as frases, todas as equações, todas as funções denotáveis, todas as teorias matemáticas, todos os algoritmos, etc. Assim, o limite **absoluto** do exprimível simbolicamente (ou capacidade descritiva de qualquer alfabeto finito) é a cardinalidade $\boldsymbol{\aleph_0}$.

Todas as linguagens possíveis são todos os subconjuntos de um Σ^*. Novamente, há a presença de um conjunto potência de um conjunto de cardinalidade $\boldsymbol{\aleph_0}$. Logo, o conjunto de todas as linguagens possíveis tem $\mathbf{card}\ P(\Sigma^*) = 2^{\aleph_0}$, o que resulta num conjunto de cardinalidade $\boldsymbol{\aleph_1}$, uma infinidade incontável.

Mesmo no campo das linguagens formais se encontram problemas incomputáveis e, mais uma vez, eles advém do descompasso entre aquilo que pode ser expresso (seja por um algoritmo, seja por uma cadeia de símbolos) e seu conjunto potência.

O grande avanço que a lógica e os sistemas axiomáticos tiveram a partir do final do século XIX foi devido ao entendimento de seu caráter essencialmente formal (de ser um procedimento completamente mecânico e regrado). Isso foi possível através da separação entre sintaxe e semântica (COSTA; DORIA, 1991). A máquina de Turing é o ápice dessa formalização.

É realmente extraordinário o fato de que uma máquina abstrata simples que desempenha apenas 4 operações (escrever, apagar, desloca a fita para a direita, desloca a fita para esquerda) seja tão versátil e possa esgotar **todos** os algoritmos possíveis.
Resumindo os tópicos de linguagens formais em termos de sua computabilidade:

Conjunto	Computável	Incomputável
Σ finito	Sim	**-**
Σ^*	$\aleph_0$	**-**
Todas as linguagens possíveis $\mathbf{card}\ P(\Sigma^*) = 2^{\aleph_0}$	$\aleph_0$	$\aleph_1$

Tabela 6.4 – Diferentes aspectos das linguagens formais e sua computabilidade

Agora é possível responder, adequadamente, a pergunta aberta no item 2.4.1:
Será a crença comum de que o que definiria uma função é uma equação, fórmula, regra ou expressão analítica qualquer é equivalente à definição formal de função (def. **2.6**)?
A resposta é **não**. A definição formal e a crença comum não são equivalentes.
Para a definição formal de função, o número de funções (discretas ou não) tem, pelo menos, cardinalidade $\aleph_1$. O número possível de regras (algoritmos) ou de expressões analíticas (que são cadeias de símbolos, que incluem equações, fórmulas, etc.), tem apenas cardinalidade $\aleph_0$. As funções são muito mais numerosas que as representações formais (equação, fórmula, lei, regra ou expressão analítica) possíveis. Muitas das regras conhecidas do cálculo aplicam-se a funções denotáveis. O que fazer com funções que não tem uma expressão explícita?

6.3.5 **Outros problemas insolúveis**

Reforçando, problemas incomputáveis são problemas insolúveis no sentido de não existir um algoritmo formal (ou máquina de Turing) que os resolva.

A seguir, alguns exemplos que foram demonstrados serem insolúveis com relação à máquina de Turing em si:

- O *halting problem*, que é a impossibilidade de decidir se uma máquina de Turing parará dado um input genérico.

> Dada uma máquina de Turing M e uma cadeia w, ambas arbitrárias, M pára com a entrada w?
> Para uma dada M fixa, dada uma cadeia arbitrária w, M pára com a entrada w?
> Dada uma máquina M arbitrária, M pára com a fita vazia?
> Dada M arbitrária, existe alguma cadeia que a faça parar?
> Dada M arbitrária, M pára com qualquer entrada possível?
> Dadas M_1 e M_2 arbitrárias, elas param com as mesmas cadeias de entrada?
> (LEWIS; PAPADIMITRIOU, 1998 apud JOSÉ NETO, 2003, p. 195)

Outros problemas relacionados à computabilidade de números:

Apesar da existência dos números computáveis, existem diversos problemas indecidíveis relacionados a eles como, por exemplo:

- Decidir, no caso geral, se dois números **computáveis** são iguais ou não (PENROSE, 1999).
- Apesar de formarem uma infinidade contável, os números **computáveis** não constituem um conjunto *efetivamente* (ou *recursivamente*) *enumerável* (MINSKY, 1969). É impossível apresentar uma máquina de Turing que possa enumerar a totalidade dos números computáveis.

7. APLICAÇÕES EM SISTEMAS ELÉTRICOS DE POTÊNCIA E CONTROLE

Dada a abrangência do conceito de computabilidade, é de se esperar que surjam implicações onde o ferramental matemático "clássico" for usado. Este é o caso da engenharia, em geral, e a área de sistemas elétricos de potência, em particular, onde o ferramental matemático "clássico", com destaque às equações diferenciais, é copiosamente utilizado. Além disso, os computadores e os mais diversos métodos numéricos utilizados, também são passíveis de uma avaliação do ponto de vista da Turing-computabilidade.

Além de uma análise do ponto de vista algorítmico, as equações diferenciais levantam questões da perspectiva da Teoria do Caos Determinístico.

Este capítulo apresentará os aspectos matemáticos gerais das ferramentas e métodos, aplicações em sistemas elétricos de potência e reflexões sobre o determinismo e as implicações teóricas em engenharia de controle, tudo isso a partir da dupla perspectiva proposta (Turing-computabilidade e Teoria do Caos Determinístico).

7.1 ASPECTOS MATEMÁTICOS GERAIS DAS FERRAMENTAS E MÉTODOS

7.1.1 **Equações diferenciais e computabilidade**

As equações diferenciais usadas em sistemas de potência serão avaliadas, mais adiante, a partir daqueles dois pontos de vista propostos, mas, dado que as equações diferenciais estão presentes em diversos campos da física, as implicações são mais abrangentes. Aliás, elas são tão abrangentes quanto suas aplicações.

Para organizar a discussão da relação entre equações diferenciais e computabilidade, a seguinte tabela colaborará:

	Computável	Incomputável
EDO	$\aleph_0$	$\aleph_1$
EDP	$\aleph_0$	$\aleph_1$
Condições iniciais de variáveis contínuas ($\mathbb{R}$)	$\aleph_0$	$\aleph_1$
Funções solução	$\aleph_0$	$\aleph_1$
Valores possíveis de uma função solução	$\aleph_0$	$\aleph_1$

Tabela 7.1 – Computabilidade das equações diferenciais, das condições iniciais, das soluções e de valores reais particulares

7.1.1.1 Sobre as EDOs e EDPs

Da perspectiva das aplicações, normalmente, as EDOs e EDPs são dadas. Foram resultados de teorias, modelos, etc. Neste sentido, são expressões denotáveis ou cadeias de símbolos, que, no máximo, podem totalizar uma infinidade de cardinalidade $\aleph_0$. Por outro lado, se forem pensadas como funções, como no capítulo 3, então elas totalizarão, no mínimo, uma infinidade incontável de cardinalidade $\aleph_1$.

7.1.1.2 Sobre as condições iniciais

Se as variáveis representam grandezas contínuas, então as condições iniciais podem ser números computáveis ou incomputáveis. Os números computáveis podem ser vistos como exceções notáveis, pois eles são extremamente improváveis, ou melhor, a escolha de condições iniciais computáveis seria algo um tanto arbitrário, dada sua raridade frente aos valores incomputáveis. Em termos físicos, como regra, não haveria porque preferir alguma condição inicial em detrimento de outras: qualquer condição inicial poderia ser escolhida. Se for assim, caso a grandeza possa ser um número real qualquer e, considerando que não há estados preferenciais, então é, em princípio, **impossível** determinar com exatidão infinita, com 100% de certeza, qualquer condição inicial.

7.1.1.3 Sobre as soluções

Considerando as soluções como sendo funções reais contínuas, apenas uma infinidade contável de funções tem algum algoritmo para calculá-las. Mesmo possuindo o algoritmo que gera a função, nem todos os seus valores são calculáveis. Para calcular um ponto são necessários que a função e o argumento sejam computáveis. Em outros termos, em uma função contínua, apenas seria possível calcular uma infinidade enumerável de pontos. Portanto, a função "construtível" seria necessariamente descontínua, no sentido de que apenas uma infinidade contável de pontos podem ser calculados.

Quando as soluções gerais das EDOs ou EDPs são funções computáveis, existe um número incontável de soluções particulares incomputáveis (*problema de Cauchy* e o uso de condições iniciais). Há soluções incomputáveis porque há condições iniciais incomputáveis.

Por outro lado, Pour-El e Richards (1978) mostraram um fato interessante:

Dada a equação diferencial ordinária:

$$\varphi'(t) = F\big(t, \varphi(t)\big) \quad \mathbf{(7.1)}$$

E a condição inicial:

$$\varphi(0) = \varphi_0 \quad \mathbf{(7.2)}$$

Se $F\big(t, \varphi(t)\big)$, dada na eq. **(7.1)**, for uma função computável e φ_0, dada na eq. **(7.2)**, for uma condição inicial computável, então a solução também é computável. Mas, se a EDO não tiver solução única, então existem casos onde nenhuma das soluções é computável.

Resumindo, mesmo que a solução exista e seja única não significa que ela seja computável. Ela não será computável, por exemplo, se as condições iniciais forem incomputáveis. Assim, a maior parte das soluções particulares é incomputável.

7.1.2 **Métodos numéricos e computabilidade**

Toda solução numérica depende de um algoritmo para ser efetuada. Assim sendo, somente uma infinidade contável de números pode, na melhor das hipóteses, ser obtida com precisão verdadeiramente arbitrária. Pode-se dizer que, para estes números, uma precisão infinita poderia ser alcançada em princípio, tendo “apenas” o tempo como gargalo.

7.1.2.1 Nota sobre os computadores

Os computadores trabalham apenas com números racionais. Em princípio, eles podem produzir irracionais computáveis (π, e, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, etc.), mas, neste caso, de fato, haverão dificuldades ou impossibilidades operacionais e práticas. De qualquer forma, mesmo que os irracionais computáveis sejam incluídos, os computadores podem apenas mostrar representações descontínuas, isto é, uma infinidade contável de pontos, que são uma parte ínfima de uma curva contínua.

Logo, não importa a taxa de amostragem, a velocidade de processamento ou memória infinita: simulações numéricas **nunca** serão completas. Dentro da atual teoria que estrutura os computadores, a descontinuidade das representações computacionais é um problema intransponível (SLAUGHTER; GRIMONI, 2010).

O uso de números racionais (precisão finita) e a descontinuidade das representações computacionais levantam questões sobre a resolução numérica de sistemas caóticos.

7.1.3 **Implicações em sistemas caóticos**

Podem-se destacar duas grandes implicações para o fato de fenômenos físicos serem descritos como sistemas caóticos:

Problema da simplificação: maior cuidado ao linearizar ou retirar certas influências (atrito, resistência do ar, hipóteses simplificadoras, etc.) nos modelos.

Problema da imprevisibilidade: é impossível, mesmo em princípio, prever o comportamento de longo termo de um sistema caótico.

Por causa da propriedade DSCI, mesmo em sistemas onde a solução existe e é única para o *problema de Cauchy* (sistema determinístico), para duas condições iniciais distintas haverão duas soluções que não são semelhantes em forma. Duas condições iniciais muito próximas apresentarão duas evoluções completamente diferentes para o mesmo sistema, o que torna a previsão exata problemática. Boas aproximações são possíveis em curtos períodos de tempo, mas não em longos períodos, por causa da divergência exponencial das trajetórias.

Se existe uma única solução para uma condição inicial específica, a previsão exata apenas seria possível se essa condição inicial for repetida identicamente.

Quando a condição inicial é um número computável (ou uma função computável), a previsão exata é possível, em princípio, para uma infinidade contável de pontos. Apenas neste caso, limitações operacionais seriam o problema.

Mas é impossível obter, em princípio, com precisão infinita, uma infinidade incontável de números reais, que podem ser as condições iniciais. Mais do que isso, no caso geral, o mais provável (em princípio, com 100% de certeza) é que as condições iniciais sejam números (ou funções) incomputáveis.

Como ressaltado no subitem 7.1.2.1, as soluções numéricas por computadores são questionáveis por conta da DSCI. Até que ponto tais soluções podem ser consideradas precisas, ou melhor, confiáveis dentro de certos limites?

7.1.3.1 A indecidibilidade do caos

Outro fato relevante é que até mesmo decidir se um sistema é caótico ou não pode ser problemático. Costa e Doria (1991) demonstraram que não existe algoritmo que decida, dado um sistema de equações diferenciais qualquer, se tal sistema é caótico. Em outras palavras, não existe um *procedimento de decisão*, que decida *a priori* se um conjunto de equações diferenciais genérico apresenta comportamento caótico. É possível decidir a presença de caos em casos particulares, mas não existe um algoritmo (máquina de Turing) geral que decida para qualquer caso. Além disso, mesmo entre os casos particulares, existem sistemas dinâmicos (conjunto de equações diferenciais) em que é muito difícil decidir se são caóticos ou não (COSTA; DORIA; FURTADO do AMARAL, 1991).

7.2 APLICAÇÕES EM SISTEMAS ELÉTRICOS DE POTÊNCIA

Para o planejamento e a implementação adequados dos sistemas elétricos de potência é de importância capital a realização de certos estudos. Entre os principais estão os estudos em regime permanente (fluxo de carga ou potência) e os estudos de transitórios (transitórios eletromecânicos e eletromagnéticos).

Nos estudos citados há extenso uso de teorias físicas e ferramentas matemáticas, além da forte presença dos computadores. Tais estudos usam modelos que são reconhecidas simplificações. A própria palavra modelo expressa seu caráter de idealização. Como já destacado, em muitos problemas práticos as simplificações e aproximações são indispensáveis e funcionam bem, tendo em vista suas finalidades. Nestes casos, a questão da possibilidade de precisão infinita seria uma mera preocupação teórica. No entanto, a existência dos sistemas caóticos e sua sensibilidade a imprecisões colocam questões sobre o uso de simplificações e aproximações nos modelos de engenharia.

No presente capítulo, eles serão avaliados pelos enfoques adotados pela tese, a teoria do caos e a computabilidade. Seguindo a lógica destes enfoques, também serão avaliados, de forma geral, os dispositivos de eletrônica de potência a partir do paradigmático circuito de Chua.

7.2.1 **Considerações gerais**

Em sistemas elétricos de corrente alternada funcionando em regime permanente senoidal (RPS), a descrição das magnitudes (tensão, corrente, impedância, potência, etc.) é feita com números complexos. Uma das razões para isso é que o uso de apenas um escalar (número real) é insuficiente para caracterizar as grandezas elétricas em RPS. Já um número complexo, traz mais informações que um número real[47] e é capaz de expressar, mais adequadamente, tais grandezas.

O $\mathbb{C}$ é isomorfo ao $\mathbb{R}^2$ e, portanto, sua cardinalidade é a mesma do $\mathbb{R}$, ou seja, $\aleph_1$. São computáveis apenas uma infinidade contável de números complexos.

7.2.2 **Fluxo de carga**

Fluxo de carga (também denominado como fluxo de potência ou como *load-flow*) é um estudo do desempenho em regime permanente e visa o dimensionamento do sistema em regime permanente (REIS, 2010). Este tipo de estudo é essencial para determinar a melhor operação de um sistema de potência já existente e para planejar o desenvolvimento futuro de qualquer sistema.

O fluxo de carga é a determinação, em vários pontos da rede elétrica, da tensão, da corrente, da potência ativa, da potência reativa, do fator de potência, etc.

A informação principal de um fluxo de carga é a amplitude e a fase da tensão em cada barra do sistema estudado e a potência ativa e reativa que circulam em cada linha.

Mais concretamente, o fluxo de carga é útil, por exemplo, para mudanças convenientes de "taps" de transformadores, determinar a geração justa entre diferentes companhias geradoras, saber onde as tensões podem estar fora das especificações, etc.

O cálculo do fluxo de carga recorre a métodos numéricos, que quando feitos em sistemas complexos (no sentido de existirem muitas barras e interligações) o uso de computadores se faz necessário.

Dois métodos numéricos famosos para o cálculo de fluxo de carga são o de *Gauss-Seidel* e o de *Newton-Raphson*. Ambos obtém as mesmas informações por processos iterativos para obtenção de solução, mas o fazem por caminhos diferentes. O método Gauss-Seidel consiste na resolução de sistemas lineares, ao passo, que o método Newton-Raphson trata de determinar os zeros (ou raízes) de uma ou várias funções.

Tais métodos são muito úteis e apresentam resultados sabidamente aproximados (quando convergem), mas, o que talvez não seja claramente reconhecido, é que os resultados são

[47] Um número complexo $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{a}+j\boldsymbol{b}$ é constituído por dois números reais *a* e *b*.

inerentemente aproximados, mesmo com modelos com total ausência de simplificações (caso isso seja possível).

Ambos os métodos utilizam algoritmos implementáveis em computadores e sujeitos aos limites de Turing-computabilidade. Assim, na melhor das hipóteses, os resultados que tais algoritmos podem fornecer são números reais computáveis.

Podem existir raízes ou soluções incomputáveis no espaço $\mathbb{R}^n$, mas seu cálculo exato é impossível em princípio, mesmo dispondo de tempo infinito. Talvez esta incompletude (a impossibilidade de calcular exatamente uma infinidade incontável de números) seja uma das razões para alguns dos eventuais problemas de convergência que estes métodos padecem.

7.2.3 **Transitórios eletromecânicos**

Os estudos de transitórios são classificados por sua duração. Neste trabalho, serão abordados dois tipos: transitórios eletromecânicos (neste item) e transitórios eletromagnéticos (no item 7.2.4). Os transitórios eletromecânicos ocorrem em períodos da ordem de 10^{-4} a 10 s (REIS, 2010). Os estudos de transitórios eletromecânicos estão relacionados à estabilidade transitória dos sistemas de potência e visam, basicamente, determinar se as máquinas do sistema permanecerão sincronizadas após grandes distúrbios, como faltas (curtos-circuitos) no sistema de transmissão, desbalanços carga-geração por mudanças repentinas na carga (ligamento ou desligamento) ou na geração (perda de unidades geradoras) (STEVENSON, 1982).

7.2.3.1 Tópicos sobre estabilidade

O principal parâmetro a ser observado para a manutenção do sincronismo do sistema é a frequência da tensão na saída dos geradores. Esta frequência é determinada pela velocidade de rotação do rotor do gerador (normalmente, uma máquina síncrona). A velocidade específica de cada gerador depende do seu número de pólos e, claro, da frequência do sistema em questão (no Brasil, por exemplo, 60 Hz).

A equação que modela o movimento do rotor de uma máquina síncrona (STEVENSON, 1982):

$$J\frac{d^2\theta_m}{dt^2} = T_a = T_m - T_e \quad \mathbf{(7.3)}$$

Onde:

J: momento de inércia total das massas do rotor

θ_m: deslocamento angular do rotor em relação a um eixo estacionário

t: tempo

T_m: torque mecânico ou de eixo suprido por uma fonte motriz menos torques retardantes devido a perdas rotacionais

T_e: torque elétrico ou eletromagnético líquido

T_a: torque acelerante líquido

A frequência elétrica do sistema de potência precisa ser rigidamente constante. Para tanto, é necessário que os rotores dos geradores girem a velocidade angular constante em qualquer circunstância.

Observando a eq. **(7.3)**, para que a velocidade angular do rotor mantenha-se constante o torque acelerante (ou desacelerante) deve ser nulo. Nas ocasiões de distúrbio, tanto o torque mecânico quanto o torque elétrico podem variar criando uma diferença entre ambos e, em consequência, acelerando (ou desacelerando) o rotor do gerador. Quando isso ocorre a frequência da tensão de saída do gerador muda e, caso o problema não seja sanado em tempo hábil, pode causar a perda de sincronismo e a consequente saída da unidade geradora.

7.2.3.2 Possibilidades e limitações

Como regra geral, a modelagem de sistemas de potência é feita com equações diferenciais (e algébricas) não-lineares. Existem estudos de estabilidade em regime permanente, onde as perturbações são pequenas em relação ao ponto de operação normal do sistema. Nestes casos, como já destacado no item 4.4.1, é possível linearizar as equações diferenciais (e algébricas) e ainda alcançar resultados satisfatórios. No entanto, no caso de grandes distúrbios (objeto dos estudos de transitórios eletromecânicos), o processo de linearização das equações diferenciais (e algébricas) que modelam os sistemas, não pode mais ser feito, sob a pena de obter resultados que não refletem os fenômenos observados.

Os geradores modernos contam com sistemas de controle, que regulam a tensão de saída e a velocidade do rotor do gerador. Eles afetam significativamente a dinâmica do gerador e que pode ter impactos na estabilidade do sistema (podendo, inclusive, ser um fator agravante às perturbações). O equacionamento do desempenho dinâmico dos geradores e seus sistemas de controle associados é feito por conjuntos de equações diferenciais (STEVENSON, 1982). Os sistemas de controle acentuam o caráter não-linear das equações.

Dessa forma, tendo em vista a natureza essencialmente não-linear das equações **modeladoras** dos sistemas elétricos de potência e seu uso necessário para a descrição adequada dos transitórios eletromecânicos, seria interessante saber se tais conjuntos de equações tem natureza caótica, pois este conhecimento poderia eventualmente contribuir nos estudos.

Para esta tese, não se pesquisaram referências sobre comportamento caótico em equações diferenciais não-lineares para estudo de transitórios eletromecânicos. De qualquer forma, a existência de comportamento caótico é uma possibilidade, que, caso exista, traz as implicações de completa imprevisibilidade no longo termo.

Se não existe pesquisa neste sentido, talvez este possa ser um novo e promissor campo.

7.2.3.3 Soluções numéricas

Para a resolução das equações diferenciais são usados diversos métodos como o de Euler, o de Euler modificado, o trapezoidal, entre outros. Mas o mais utilizado é o método de Runge-Kutta de quarta ordem.

Todos os métodos proporcionam soluções aproximadas. Como visto, os computadores fornecem apenas números racionais (ou irracionais computáveis), sendo, no geral, impossível alcançar soluções exatas. Os métodos mencionados realizam a operação de integração numericamente e, portanto, fornecendo uma função. Essa função é necessariamente descontínua e os pontos fornecidos necessariamente computáveis. Por serem pontos computáveis, representam 0% dos pontos de uma função contínua.

E, reforçando, caso o sistema seja caótico, pode-se garantir a imprevisibilidade de longo termo.

7.2.4 **Transitórios eletromagnéticos**

Os transitórios eletromagnéticos são fenômenos de curtíssima duração associados a descargas atmosféricas (raios) ou a surtos de manobra (chaveamentos em geral, como, por exemplo, a abertura e fechamento de linhas). As descargas atmosféricas causam transitórios de alta frequência (períodos de 1,5 a 50 μs) e os surtos de manobra causam transitórios de frequências menos elevadas (períodos de 50 a 500 μs) (REIS, 2010).

Os estudos de transitórios eletromagnéticos visam dimensionar o isolamento de equipamentos, determinar a silhueta de torres de transmissão, sugerir o *layout* de subestações (posicionamento de equipamentos, barramentos, pára-raios, etc.), entre outros aspectos (REIS, 2010).

7.2.4.1 Equação da onda trafegante

As descargas atmosféricas são uma ameaça permanente aos sistemas de potência e seus equipamentos. Para tensões até 230 kV, a isolação de linhas e equipamentos é ditada pela proteção contra descargas atmosféricas. Na faixa entre 230 kV e 700 kV, tanto as descargas atmosféricas quanto os surtos de manobra são considerados. Acima de 700 kV, os surtos de manobra são os principais determinantes para o nível de isolação (STEVENSON, 1982).

Quando ocorrem transitórios eletromagnéticos em linhas de transmissão ou distribuição são criadas ondas de sobretensões e sobrecorrentes[48] que percorrem as linhas a partir do ponto de surto. Estas ondas são denominadas *ondas trafegantes*. O fenômeno envolvendo linhas de transmissão é bastante complexo, mas, recorrendo, mais uma vez, às simplificações, é possível realizar um estudo esclarecedor.

---

[48] Por exemplo, quando um raio atinge uma linha, há uma injeção de corrente que se divide (em princípio, igualmente) nos dois sentidos. Valores de 10 kA ou maiores são típicos (STEVENSON, 1982).

As linhas sem perdas são uma boa aproximação para fenômenos de alta frequência (como é o caso dos transitórios eletromagnéticos) (STEVENSON, 1982), onde a reatância e susceptância (ωL e ωC, respectivamente) são muito maiores que a resistência e condutância (R e G, respectivamente). A expressão matemática que descreve, aproximadamente, esse fenômeno é uma equação diferencial parcial linear de segunda ordem conhecida como equação de onda unidimensional, vista no capítulo 3.

Adequando um formalismo matemático geral à situação de interesse, obtém-se a seguinte expressão (equação da onda trafegante):

$$\frac{1}{LC}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad \mathbf{(7.4)}$$

Onde:

x é a distância linear ao extremo emissor

t é o tempo

v é a tensão em função de x e de t

L é a indutância por unidade de comprimento

C é a capacitância por unidade de comprimento

No caso da equação de onda unidimensional, o problema do valor inicial ou *problema de Cauchy*, a solução do problema existe e é única. Se as condições iniciais ($v(x,0) = \varphi(x)$ e $\frac{\partial v}{\partial t}(x,0) = \psi(x)$), são funções analíticas (conforme a nota de rodapé 22), então, pelo teorema de Cauchy-Kovalevsky existe solução analítica e pelo teorema de Holmgren a solução analítica é a única solução. A solução geral da eq. **(7.4)** é uma função da posição e do tempo e tem duas componentes: uma progressiva (ligada a $(x - \mathrm{v}t)$) e outra regressiva (ligada a $(x + \mathrm{v}t)$). A solução geral é dada pela seguinte expressão:

$$v = f_1(x - \mathrm{v}t) + f_2(x + \mathrm{v}t) \quad \mathbf{(7.5)}$$

Onde:

$\mathrm{v} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ é a velocidade da onda trafegante de tensão.

O algoritmo de obtenção da solução particular é análogo à eq. **(3.9)** e é dada por:

$$v(x,t) = \frac{1}{2}[\varphi(x+t) + \varphi(x-t)] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \psi(\tau)d\tau$$

Com as condições iniciais e as condições de contorno (valores terminais, que seriam tensões nos extremos de uma linha) é possível determinar os valores particulares de cada componente (f_1 e f_2) da eq. **(7.5)**.

A figura 13 mostra a componente progressiva, em dois instantes sucessivos (t_1 e t_2), de uma onda de tensão.

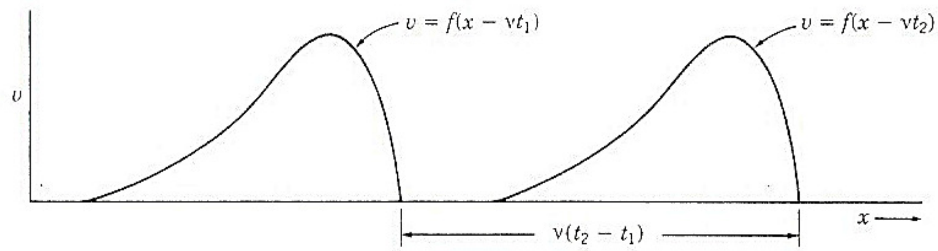

Figura 13 – Uma onda de tensão, que é função de (x-vt), é mostrada para valores de t iguais a t_1 e t_2
(Fonte: STEVENSON, 1982, p. 116)

A solução geral desta equação de onda é uma função computável, mas, como mencionado no subitem 7.1.1.3, uma solução geral pode ser uma função computável, mas existe um número incontável de soluções particulares. Caso as condições iniciais ou de contorno sejam incomputáveis, as soluções particulares também o serão. De qualquer forma, mesmo que a solução particular da equação da onda trafegante seja computável, apenas uma infinidade contável de pontos (ou seja, um conjunto discreto de pontos) podem ser calculados com precisão verdadeiramente arbitrária (no sentido de que se o tempo fosse infinito a precisão também o seria). A esmagadora maioria dos pontos não podem ser efetivamente calculados.

No caso da equação de onda unidimensional aplicada a ondas trafegantes, as simplificações usadas não prejudicam o entendimento e nem a resolução de problemas práticos. Assim, precisões arbitrariamente grandes são desnecessárias. O intuito foi apenas o de mostrar a idéia de computabilidade em um exemplo concreto. Esta é uma equação linear, onde dados aproximados proporcionam soluções aproximadas.

7.2.4.2 Comentários sobre a equação de onda tridimensional

Este assunto não está diretamente ligado aos estudos tradicionais feitos em sistemas de potência, no entanto está relacionado a questões de computabilidade e a aspectos que podem ser relevantes em pesquisas mais detalhadas sobre radiações oriundas de linhas de transmissão.

A propagação de ondas eletromagnéticas a partir dos diversos dispositivos elétricos e eletrônicos pode ser descrita por equações de onda do tipo tridimensional. As próprias linhas de transmissão são fontes de radiação eletromagnética que se propaga no espaço (tridimensional) circunvizinho, irradiando-o e tendo como consequências conhecidas a indução de tensões e correntes em outras linhas ou qualquer material condutor. Enfim, a expressão da equação de onda tridimensional em coordenadas cartesianas é dada pela eq. **(3.10)**, reescrita a seguir:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$$

A solução $u(x,y,z,t)$ é univocamente determinada por duas condições iniciais:

a) Valor de $u(x,y,z,t)$ em $t=0$
b) Valor de $\partial u/\partial t$ em $t=0$

Adotando:

1) $u(x,y,z,0)=f(x,y,z)$
2) $\frac{\partial u}{\partial t}(x,y,z,0)=0$

Foi rigorosamente demonstrado por Pour-El e Richards (1981), o seguinte:

Teorema 7.1: Existe uma função computável (toda função computável é contínua, mas nem toda função contínua é computável) $f(x,y,z)$ tal que, a solução $u(x,y,z,t)$ é contínua, mas incomputável e, além disso, o valor $u(0,0,0,1)$ é um número real incomputável.

Pode-se concluir que:

- Apesar de a solução existir e ser única ela pode ser incomputável. A solução $u(0,0,0,1)$ existe e é única, mas é incomputável.
- Apesar dos argumentos serem números computáveis, um valor particular da função pode ser um número incomputável.
  Os valores dos argumentos de $u(0,0,0,1)$ são todos números computáveis, mas, o valor particular de u é um número incomputável.
- Fisicamente falando, a função solução pode ser, por exemplo, a tensão em um ponto do espaço, em um dado instante. Logo, pode ser impossível saber exatamente a distribuição de tensões no espaço e no tempo, mesmo em posições computáveis e tempo computável.

7.2.5 **Eletrônica de potência**

Da perspectiva da dinâmica caótica, é possível fazer uma avaliação de dispositivos de eletrônica de potência de forma geral, pois uma de suas características marcantes é seu caráter não-linear. Dispositivos ou sistemas descritos por equações diferenciais não-lineares podem apresentar dinâmica caótica.

De fato, dentro da Teoria do Caos Determinístico, um dos exemplos mais famosos de comportamento caótico é um circuito eletrônico conhecido como circuito de Chua. Segundo Basak e Parui (2007), muitos estudos mostraram que diversos sistemas de eletrônica de potência também apresentam comportamento caótico. Inversores, retificadores e conversores são exemplos de dispositivos de eletrônica de potência que apresentam tal dinâmica. Por algum motivo, os conversores CC-CC são os mais pesquisados, como os conversores boost, buck, buck-boost e Cúk (BASAK; PARUI, 2007).

Será examinado o circuito de Chua, por sua simplicidade. As características gerais apresentadas pelo circuito de Chua podem ser estendidas aos dispositivos de eletrônica de potência. O conversor (regulador) Cúk será apresentado de forma complementar à exposição do circuito de Chua.

7.2.5.1 Circuito de Chua

O circuito de Chua (ou Chua-Matsumoto) foi proposto pelo engenheiro filipino Leon Ong Chua (1936-) em 1983 e é considerado o circuito eletrônico mais simples a apresentar comportamento caótico.

A figura 14 mostra o circuito de Chua e seu bipolo não-linear (cuja curva, conhecida como "piecewise linear" (linear por partes), pode ser apreciada na figura 15), destacado com linha cheia.

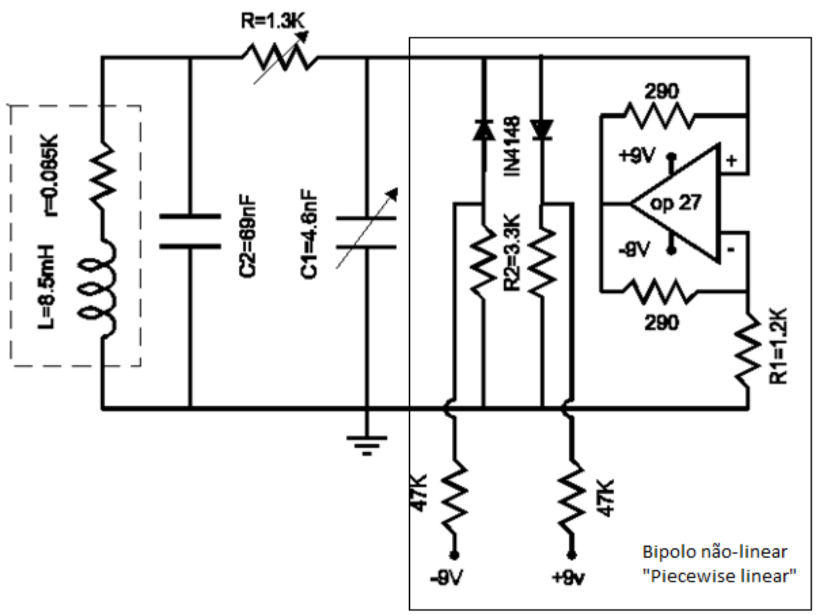

Figura 14 – Diagrama do circuito de Chua com destaque ao bipolo não-linear
(Fonte: LISBOA, 2004, p. 10)

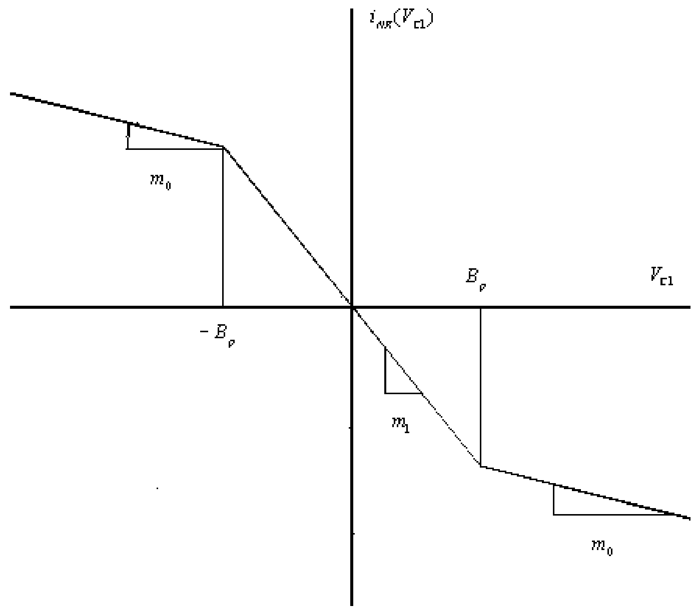

Figura 15 – Grandeza elétrica $i_{NR}(V_{C_1})$ do bipolo não-linear (“piecewise linear”) do circuito de Chua (Fonte: LISBOA, 2004, p. 10)

As equações **(7.6)**, **(7.7)**, **(7.8)** e **(7.9)** descrevem o circuito de Chua.

$$C_1\frac{dV_{C_1}}{dt} = g\left(V_{C_2} - V_{C_1}\right) - i_{NR}\left(V_{C_1}\right) \quad \mathbf{(7.6)}$$

$$C_2\frac{dV_{C_2}}{dt} = g\left(V_{C_1} - V_{C_2}\right) + i_L \quad \mathbf{(7.7)}$$

$$L\frac{di_L}{dt} = -V_{C_2} \quad \mathbf{(7.8)}$$

A função $i_{NR}(V_{C_1})$ é não-linear e cuja expressão algébrica, que pode ser obtida do gráfico da figura 15, é:

$$i_{NR}\left(V_{C_1}\right) = m_0 V_{C_1} + 0{,}5(m_1 - m_0)\left(\left|V_{C_1} + B_p\right|\right) + 0{,}5(m_0 - m_1)\left(\left|V_{C_1} - B_p\right|\right) \quad \mathbf{(7.9)}$$

Os diversos parâmetros podem ser manipulados alterando as características dinâmicas do circuito, no entanto este aspecto não interessa ao presente trabalho.

As variáveis V_{C_1} (tensão no capacitor C_1), V_{C_2} (tensão no capacitor C_2) e i_L (corrente no indutor L) apresentam comportamento caótico. Elas são também variáveis de estado e, quando representadas em espaços de fase apresentam certos padrões, que é um dos traços distintivos do caos.

A figura 16 mostra a evolução temporal de V_{C_2}, para exemplificar o comportamento caótico:

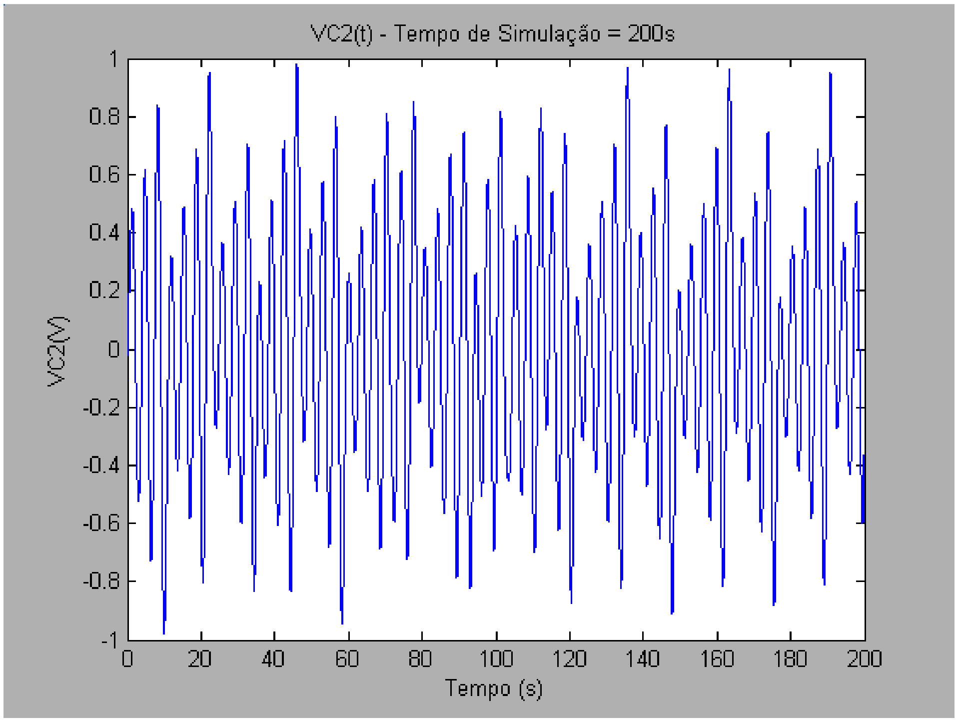

Figura 16 – Evolução temporal da tensão no capacitor C_2 (V_{C_2})
(Fonte: LISBOA, 2004, p. 28)

Discutindo a figura 16: como V_{C_2} é uma variável que apresenta dinâmica caótica, um mínimo erro na determinação da carga inicial (condição inicial) do capacitor C_2 acarretará uma evolução temporal (no longo termo) totalmente diferente à evolução que conta com o valor de carga exato.

E o valor da carga inicial é computável? No caso específico de carga elétrica, sim. Os valores de carga elétrica são quantizados[49] por números racionais e, portanto, são computáveis. Mas, no caso geral, não. Por exemplo, os valores de corrente podem ser qualquer número real, pois, apesar da carga elétrica ser quantizada, a taxa de variação temporal da carga elétrica não o é necessariamente. Além disso, a matemática que lida com os fenômenos elétricos e magnéticos é contínua e essas grandezas físicas são associadas ao contínuo dos números reais ou dos

[49] O módulo do valor da carga elétrica fundamental é $1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C. Será V_{C_2} um número irracional ou racional?

números complexos[50]. Assim, como não há razão aparente para escolher um valor específico, a probabilidade de que alguma grandeza contínua (como, por exemplo, uma corrente inicial em um indutor) em um dado instante[51] seja um número incomputável é de 100%, e, portanto, **qualquer** tentativa de previsão de longo termo está fadada a falhar, já que a condição inicial não poderá ser repetida identicamente.

7.2.5.2 Conversor Cúk

Apenas para complementar a exposição, a figura 17 mostra o esquema de um dispositivo de eletrônica de potência, um conversor Cúk, que também apresenta comportamento caótico:

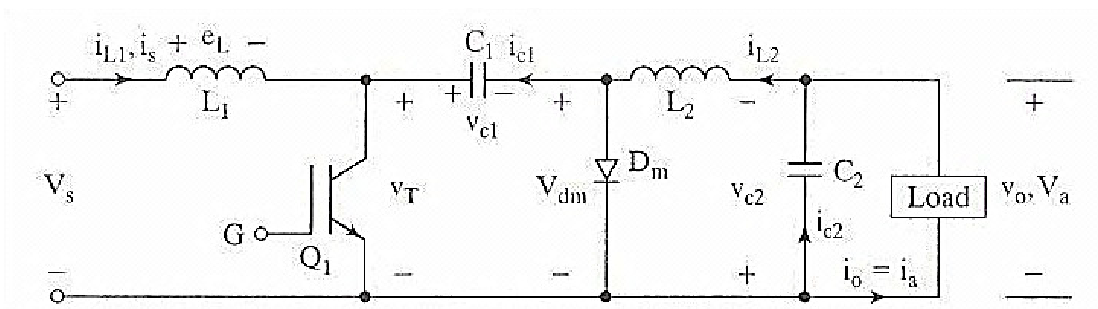

Figura 17 – Circuito do conversor Cúk
(Fonte: RASHID, 2004, p. 199)

Os conversores CC-CC são dispositivos eletrônicos que convertem fontes fixas de tensão contínua (entrada) em fontes variáveis de tensão contínua (saída). Estes conversores têm diversas aplicações. Uma, onde são muito comuns, é no controle de motores de tração elétrica (RASHID, 2004).

O conversor Cúk é um tipo de conversor CC-CC em que a tensão de saída pode ser menor, igual ou maior que a tensão de entrada.

A imprevisibilidade de importantes variáveis de circuitos eletrônicos foi exemplificada pelo circuito de Chua e elas se estendem àqueles de eletrônica de potência. Por exemplo, sua evolução dinâmica de longo termo é imprevisível, já que as grandezas, como corrente e tensão

[50] Até que ponto essa associação é conveniente é uma questão em aberto e amplamente debatida nos meios filosóficos.

[51] É possível pensar o seguinte: no caso geral, se for arbitrado o instante inicial *t*=0 (número computável) o que garante que a condição inicial será computável nesse instante?

do conversor Cúk, por exemplo, são igualmente consideradas números reais (ou complexos) e não havendo uma condição inicial preferencial, então a probabilidade de que essas grandezas sejam números incomputáveis é de 100%.

Problemas de previsão também podem advir de medidas imprecisas, mas este é uma questão de natureza completamente diferente.

Atualmente, a engenharia de controle atua e controla sistemas que apresentam comportamento caótico. Quando o faz, ela destrói a dinâmica caótica. Quando controlado, o comportamento do sistema se torna previsível. Mas, se o objetivo é prever o comportamento do sistema caótico sem esquemas de controle (que tornam a dinâmica previsível), essa é uma tarefa impossível em princípio.

7.3 SOBRE O DETERMINISMO E AS IMPLICAÇÕES TEÓRICAS EM ENGENHARIA DE CONTROLE

Como mencionado em capítulos anteriores, que foram preparativos, a principal discussão sobre o determinismo será desenvolvida agora.

7.3.1 **Origens**

O paradigma de ciência da modernidade foi desenvolvido nos séculos XVI, XVII e XVIII e ainda tem forte influência sobre a ciência contemporânea.

Essa influência é sentida, principalmente, em certos ideais científicos como o ideal de objetividade absoluta, de conhecimento certo, de simplicidade, de unificação do conhecimento em um conjunto de princípios, de apriorismo, de determinismo (no sentido de possibilidade de prever em princípio qualquer evento), de fé cega com relação às capacidades racionais e lógicas humanas, etc.

Muitos desses ideais são oriundos da valorização da matemática e suas características, que tem uma longa história na cultura ocidental.

O uso da matemática como meio de descrição da natureza (em grego, *physis* e em latim, *natura*) remonta, pelo menos, aos filósofos pitagóricos (nota de rodapé 18) e foi defendida e elaborada por Platão de Atenas (348 a. C.– 428 a. C.). No século XVII, durante o Renascimento europeu, Galileu seguiu a tendência cultural e ressuscitou o projeto platônico de resumir as verdades dos fenômenos à matemática[52]. Na Europa do começo do século XVII, a matemática não era considerada um conhecimento muito importante, mas Galileu reivindicou a especificidade e autonomia das disciplinas científicas matemáticas (naquela época, astronomia, ótica e mecânica), elevando o *status* da matemática e aumentando a amplitude de sua aplicação no estudo da natureza. Para ele, a matemática tinha um escopo muito mais amplo e adquiriu valor de verdade. Dizia Galileu:

[52] Na época de Platão e, também, de Galileu, a matemática era apenas geometria. Para mais detalhes sobre a revalorização da matemática durante o Renascimento europeu e a vida de Galileu, ver o APÊNDICE A.

> A filosofia está escrita nesse grande livro que permanece sempre aberto diante de nossos olhos; mas não podemos entendê-la se não aprendermos primeiro a linguagem e os caracteres em que ela foi escrita. Essa linguagem é a matemática e os seus caracteres são triângulos, círculos e outras figuras geométricas. (CAPRA, 1999, p. 50)

Além disso, Galileu foi, provavelmente, o primeiro a colocar a exigência de verificação experimental no estudo da natureza, sendo um autêntico avanço em relação à ciência grega, que era puramente especulativa. Assim, ele configurou a Física Clássica como teoria matematizada com verificação experimental.

Introduziu, também, as idealizações e aproximações para o estudo dos fenômenos físicos. As idealizações e aproximações são usadas permanentemente em engenharia com o intuito de facilitar o tratamento dos problemas através da simplificação (nota de rodapé 26).

Galileu defendeu o uso da matemática para o estudo da natureza, mas, pelas mãos de René Descartes, ela teve um impacto cultural muito maior. Foi através de Descartes que o conhecimento matemático não serviu apenas como ferramenta de estudo da natureza, mas se tornou um paradigma para **todo** o conhecimento ou ciência.

Descartes era matemático e isso ficou patente em sua filosofia. Ele tomou o método axiomático, usado por Euclides para estruturar a geometria, e, literalmente, o transplantou para que estruturasse todo o conhecimento. Dizia Descartes:

> Não admito como verdadeiro o que não possa ser deduzido, com a clareza de uma demonstração matemática, de noções comuns de cuja verdade não podemos duvidar. Como todos os fenômenos da natureza podem ser explicados desse modo, penso que não há necessidade de admitir outros princípios da física, nem que sejam desejáveis. (CAPRA, 1999, p. 53-54)

E continua:

> Toda ciência é conhecimento certo e evidente. Rejeitamos todo conhecimento que é meramente provável e consideramos que só se deve acreditar naquelas coisas que são perfeitamente conhecidas e sobre as quais não pode haver dúvida. (CAPRA, 1999, p. 53)

E mais:

> [...] não existem outros caminhos ao alcance do homem para o conhecimento certo da verdade, exceto a intuição evidente e a necessária dedução. (CAPRA, 1999, p. 54)

Através dessas frases, fica bastante clara a índole euclidiana de Descartes. Como visto, essa forma de organizar o conhecimento é chamada de *organização euclidiana do conhecimento* ou *organização fundacionista do conhecimento*, caracterizada pela tentativa de estabelecimento de certos fundamentos a partir dos quais todo o conhecimento poderia ser construído[53].

Para o **racionalismo** cartesiano **tudo** está ao alcance da razão, **tudo** pode ser explicado em termos relativamente simples (os fundamentos evidentes). A filosofia cartesiana exalta a matemática e suas características: a simplicidade, a certeza *a priori* e a elegância. Para Descartes, o mundo era essencialmente simples e, assim, também instituiu a simplicidade como princípio científico.

A invenção da geometria analítica tinha o intuito de estudar o mundo material (*res extensa*) e, também, efetivar a visão filosófica e metafísica cartesianas.

Tal filosofia foi um marco da modernidade e marcou toda a cultura ocidental e, particularmente, a ciência. Estas marcas perduram até hoje.

Um dos resultados deste tipo de filosofia foi o aparecimento da teoria mecânica de Newton. Com as contribuições científicas de seus predecessores e a nova gama de crenças, Newton desenvolveu uma teoria que impressionou e influenciou, profundamente, os cientistas dos séculos XVII, XVIII e XIX, pois representou, entre outras coisas, uma grande síntese[54] (ideal de unidade do conhecimento).

Representou uma grande síntese porque unificou fenômenos celestes e terrestres[55], pois era capaz de explicar e/ou prever, na mesma teoria, o movimento dos corpos e o fenômeno das marés, na Terra, e o comportamento dos planetas e luas, no espaço. Também foi capaz de unificar teorias dispersas, incorporando-as. Por exemplo, as leis empíricas de Kepler, que descreviam o movimento dos planetas. Na teoria da gravitação, tais leis podiam ser simplesmente deduzidas dos princípios gerais, ou seja, das leis da gravitação e da dinâmica.

A teoria de Newton desenvolveu-se nos séculos XVIII e XIX e, através de sucessivos refinamentos das equações newtonianas do movimento, expandiu a análise para uma faixa mais ampla de fenômenos.

Tal sucesso da matemática apenas reforçava a pretensiosa ambição de Descartes. O determinismo laplaciano foi o auge destas pretensões.

---

[53] Euclides teve grande influência no pensamento científico e filosófico ocidental. Descartes e Hilbert foram inspirados pelas mesmas idéias euclidianas.

[54] Na verdade, a teoria newtoniana impressionou e influenciou muitos outros. Cientistas e filósofos, também, transplantaram as idéias e características daquela teoria (e, consequentemente, do cartesianismo) para as mais diversas áreas, chegando, inclusive, à política. Esta grande síntese, e a capacidade explicativa e preditiva de poucos princípios matemáticos, tiveram um impacto tão profundo que repercutem, ainda hoje, nos ideais científicos.

[55] Na Idade Média, os fenômenos celestes e os terrestres pertenciam a domínios completamente distintos devido à filosofia de Aristóteles (GALILEI, 2004).

7.3.2 **A principal concepção de determinismo**

A principal idéia de determinismo (e de ciência determinística) surgiu no começo do século XIX e foi proposta pelo matemático e astrônomo francês Pierre-Simon de Laplace (1749-1827). Segundo Earman (1986), o determinismo laplaciano e seus "parentes" próximos foram as únicas variedades de determinismo que receberam atenção na literatura filosófica. Sua influência foi tão significativa que as próprias definições e conotações que o termo adquiriu nos dicionários[56] são claramente semelhantes com a proposta laplaciana.

Laplace desenvolveu sua noção de determinismo em alguns de seus trabalhos. Objetivamente, a essência de tal proposta apareceu na introdução de seu *Essai philosophique sur les probabilités* de 1814, em um trecho que dizia o seguinte:

> Nous devons donc envisager l'état présent de l'univers comme l'effet de son état antérieur et comme la cause de celui qui va suivre. Une intelligence qui, pour un instant donné, connaîtrait toutes le forces dont la nature est animée et la situation respective des êtres qui la composent, si d'ailleurs elle était assez vaste pour soumettre ces données à l'Analyse, embrasserait dans la même formule les mouvements des plus grands corps de l'univers et ceux du plus léger atome: rien ne serait incertain pour elle, et l'avenir, comme le passé, serait présent à ses yeux[57]. (LAPLACE, 1878-1912, v. 7, p. vi-vii)

Laplace viveu na época do auge da teoria mecânica newtoniana, quando suas aplicações bem-sucedidas estavam em expansão. Particularmente, para grande parte dos cientistas dos séculos XVIII e XIX, a teoria newtoniana era considerada uma descrição fiel e completa de todo o mundo físico.

Uma das pessoas que refinou as soluções de Newton foi justamente Laplace. Para o sistema solar, por exemplo, Newton forneceu apenas características gerais. Laplace refinou os cálculos e foi capaz de explicar o movimento dos planetas, luas e cometas em seus mínimos detalhes (CAPRA, 1999).

---

[56] Comparar, por exemplo, a noção laplaciana com a seguinte definição de determinismo dada pelo dicionário Houaiss de Língua Portuguesa:
"Princípio segundo o qual todos os fenômenos da natureza estão ligados entre si por rígidas relações de causalidade e leis universais que excluem o acaso e a indeterminação, de tal forma que uma inteligência capaz de conhecer o estado presente do universo necessariamente estaria apta também a prever o futuro e reconstituir o passado."

[57] Podemos considerar o estado presente do universo como o efeito de um estado anterior e como a causa daquele que vai seguir. Uma inteligência que, em um instante dado, conhecesse todas as forças que animam a natureza e a situação respectiva daquilo que a compõe, aliás, se ela fosse suficientemente vasta para submeter esses dados à análise, abrangeria, dentro da mesma fórmula, os movimentos dos maiores corpos do universo e dos átomos mais ligeiros: nada seria incerto para ela e o futuro, como o passado, estariam presentes aos seus olhos.

Quando Laplace fez sua afirmação imaginava que **todos** os fenômenos da natureza fossem redutíveis à mecânica newtoniana e equacionados através do cálculo diferencial desenvolvido até aquela data. Acreditava que todos os fenômenos nada mais seriam do que choques e interações gravitacionais (forças) descritas completamente pelas leis de Newton, que eram expressas por equações diferenciais[58].

Apesar da queda da teoria newtoniana como descrição fiel e geral dos fenômenos naturais **conhecidos** (pelo advento, e posterior desenvolvimento, da teoria eletromagnética, da teoria da relatividade e da mecânica quântica), ainda era possível sustentar a idéia de determinismo laplaciano, pois as principais teorias da física são semelhantes à teoria newtoniana no seguinte quesito: são formuladas em termos de equações diferenciais e, assim sendo, conhecido o estado de um sistema, em um dado instante, todos os demais instantes estarão determinados pelas equações da teoria (PENROSE, 1999). Matematicamente, não houve mudança significativa. Aliás, do ponto de vista matemático, o surgimento de novas teorias físicas é irrelevante: as ferramentas e propriedades matemáticas permanecem as mesmas. A física só é relevante para a matemática quando propõe problemas e conceitos e demanda novas ferramentas e técnicas.

Assim, a idéia de determinismo laplaciano está inserida no contexto da modernidade ocidental marcada pelo racionalismo cartesiano.

7.3.3 **A influência do determinismo laplaciano**

A idéia laplaciana de determinismo se transformou em crença e, esta crença, é muito comum dentro da comunidade científica, especialmente entre aqueles que são conhecedores da física.

A grosso modo, aqueles que subscrevem o determinismo, acreditam que a previsão de qualquer fenômeno é sempre possível em princípio. Para tanto, seria necessário conhecer as leis que regem a natureza, o estado exato do universo em um dado instante e ter poder infinito de cálculo.

É reconhecido que geralmente, na prática, a previsão precisa é impossível. Mas a impossibilidade não seria teórica: ela seria apenas uma impossibilidade prática. O

[58] Laplace fez contribuições importantes em matemática, astronomia e física. Uma de suas contribuições é bem conhecida dentro da engenharia elétrica: a transformada de Laplace, idealizada para auxiliar na resolução de equações diferenciais e integrais.

impedimento se daria por questões circunstanciais (precisão infinita, quantidade e complexidade das equações, quantidade de interações, etc). Por isso, acredita-se, também, que, apesar das dificuldades práticas, as previsões poderiam ser arbitrariamente precisas e os desvios atribuídos a algum tipo de ignorância. Logo, existiria a possibilidade de previsão exata das grandezas físicas (que caracterizariam completamente o estado físico) em qualquer instante futuro.

Esse tipo de crença é tão arraigada que, mesmo grandes críticos do determinismo caem na armadilha: a crença de que a matemática da física (e a física) pode, em princípio, ser totalmente precisa. Um exemplo é o escritor e físico Fritjof Capra (1939-), grande crítico da filosofia cartesiana/mecanicista/determinista (filosofia que ele denomina de "velho paradigma") e defensor de abordagens científicas mais complexas. Em suas próprias palavras:

> O velho paradigma baseia-se na crença cartesiana na certeza do conhecimento científico. No novo paradigma, é reconhecido que todas as concepções e todas as teorias científicas são limitadas e aproximadas. A ciência **nunca** pode fornecer uma compreensão completa e definitiva.
>
> Isso pode ser facilmente ilustrado com um experimento simples que é, com freqüência, realizado em cursos elementares de física. A professora deixa cair um objeto a partir de uma certa altura, e mostra a seus alunos, com uma fórmula simples de física newtoniana, como calcular o tempo que demora para o objeto alcançar o chão. Como acontece com a maior parte da física newtoniana, esse cálculo desprezará a resistência do ar e, portanto, não será **completamente** preciso. Na verdade, se o objeto que se deixou cair tivesse sido uma pena de pássaro, o experimento não funcionaria, em absoluto.
>
> A professora pode estar satisfeita com essa 'primeira aproximação', ou pode querer dar um passo adiante e levar em consideração a resistência do ar, acrescentando à fórmula um termo simples. O resultado – a segunda aproximação – será mais preciso, mas ainda não o será **completamente**, pois a resistência do ar depende da temperatura e da pressão do ar. Se a professora for muito rigorosa, poderá deduzir uma fórmula muito mais complicada como uma terceira aproximação, que levaria em consideração essas variáveis.
>
> No entanto, a resistência do ar depende não apenas da temperatura e da pressão do ar, mas também da convecção do ar – isto é, da circulação em grande escala de partículas de ar pelo recinto. Os alunos podem observar que essa convecção do ar não é causada apenas por uma janela aberta, mas pelos seus próprios padrões de respiração; e, a essa altura, a professora provavelmente interromperá esse **processo de melhorar as aproximações em passos sucessivos**. (CAPRA, 2003, p.49-50, negrito nosso)

No trecho, Capra defende o caráter aproximado da mecânica newtoniana usando o argumento de dificuldade operacional para considerar todas as influências físicas na dinâmica da queda de um corpo. No entanto, o argumento usado por Capra não exclui a possibilidade de que, em princípio, uma precisão completa seja alcançável, pois as aproximações não são intrínsecas à teoria, mas, sim, um expediente usado para facilitar (possibilitar) os cálculos. Desse modo, ele defende o conhecimento aproximado, mas o conhecimento exato continua como uma possibilidade teórica. Em princípio, esta idéia de aproximações sucessivas, poderia, sim, resultar na exatidão do cálculo.

É assim que pensam muitos físicos, engenheiros e, inclusive, o próprio Capra, que abraçam a visão cartesiana/newtoniana/laplaciana (por exemplo, de que a ciência poderia fornecer uma compreensão completa) sem perceber[59].

Em engenharia, estas noções são particularmente populares e constituem, inclusive, pressupostos de trabalho. Por exemplo, em engenharia de sistemas e controle se assume implicitamente que sistemas físicos podem, em princípio, ser completamente descritos e esgotados através das leis físicas e das ferramentas matemáticas, em especial, as equações diferenciais. Tais sistemas só não são esgotados porque tornaria o problema intratável, já que o equacionamento seria muito complexo com uma quantidade enorme de variáveis e equações. Mas, será que sistemas físicos podem ser totalmente esgotados, no sentido de que, através da caracterização por grandezas físicas, o comportamento desses sistemas pode ser descrito com precisão infinita em qualquer instante?

Será a crença no determinismo laplaciano ainda sustentável, tendo em vista a Teoria do Caos Determinístico e o conceito de Turing-computabilidade?

Para estruturar e facilitar a discussão sobre o determinismo laplaciano será usado um expediente: o "Demônio de Laplace".

7.3.4 **O Demônio de Laplace**

Na famosa citação de Laplace é mencionada uma inteligência sobrenatural, que ficou conhecida como o "Demônio de Laplace". Esta entidade possuiria uma série de características, as quais definem, de certa forma, a noção de determinismo e personificam a possibilidade de previsão. Nas palavras de Pessoa Jr. (2005, p. 184): "Um exemplo famoso seria o 'demônio de Laplace', que é utilizado para que se dê sentido à expressão 'previsibilidade em princípio' usado na definição de determinismo".

Esta entidade foi idealizada como solução ou explicação para o problema do acaso.

[59] Pode-se dizer, até, que a escolha do exemplo por parte de Capra foi infeliz: a convecção do ar, que é descrita pelas equações diferenciais parciais não-lineares de Navier-Stokes (mecânica dos fluídos), pode apresentar comportamento caótico. Se ele tivesse optado por comentar apenas a convecção do ar, e seu eventual comportamento caótico, talvez, pudesse justificar, de maneira mais consistente, o caráter aproximado das teorias científicas.

O "Demônio de Laplace" reflete a essência dos pressupostos da física e, como consequência, da engenharia de controle.

7.3.4.1 Características do "Demônio de Laplace"

Segundo Pessoa Jr (2005), as características do "Demônio de Laplace" são:

a) Onisciência instantânea

   Conhece o estado de todo o universo num t, determinação das condições iniciais com precisão numérica infinita.

b) Erudição científica completa (nomológica)

   Conhecimento de todas as leis que "regem"[60] o universo.

c) Super-inteligência

   Poder de computação: usando as leis e os dados das condições iniciais, calcula (determina) a situação do universo em qualquer instante.

d) Não-distúrbio

   O "Demônio" não afeta, de nenhuma forma, o funcionamento da realidade.

7.3.4.2 Como opera o "Demônio de Laplace"?

De maneira esquemática, é possível organizar a forma de operação do "Demônio de Laplace" em 4 grandes blocos, que são ilustrados pela figura 18.

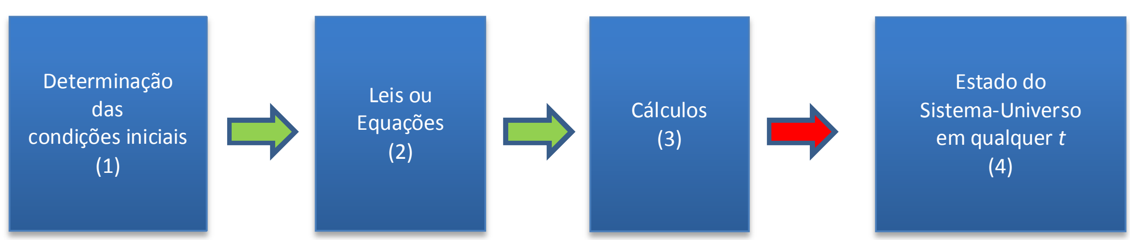

Figura 18 – Forma de operação do "Demônio de Laplace"

[60] A idéia de "reger", da existência de leis fixas, é uma característica da filosofia grega, reafirmada pelo cartesianismo.

Ao esquematizar as operações feitas pelo “Demônio de Laplace”, organiza e facilita a discussão sobre as capacidades de tal entidade. Os blocos são numerados para posterior referência.

7.3.5 **Problemas com o “Demônio de Laplace”**

À luz da Turing-computabilidade e da Teoria do Caos Determinístico, o “Demônio de Laplace” pode ser avaliado de forma bastante pontual. Assim, existem algumas objeções que podem ser feitas às capacidades do “Demônio de Laplace”. As objeções serão discutidas conforme a numeração da figura 18.

(1) Incomputabilidade das condições iniciais

(2) Incomputabilidade da solução das equações diferenciais

(3) Incomputabilidade dos cálculos

(4) Incomputabilidade de números em geral

Alguns argumentos apresentados aqui são semelhantes àqueles da seção 7.1.

7.3.5.1 Incomputabilidade das condições iniciais

A primeira característica do “Demônio de Laplace” está associada ao bloco (1) da figura 18.

a) Onisciência instantânea

Conhece o estado de todo o universo num *t*, determina as condições iniciais com precisão infinita.

Será possível, em princípio, determinar o estado (magnitude de todas as grandezas físicas) em *t* com precisão infinita?

Não.

Admitindo que as leis físicas sejam funções dos números reais (ou *continuum*), a possibilidade de obtenção ou representação de números é limitada em princípio, pois, apesar de existir uma quantidade incontável de números reais, sendo computáveis (ou têm representação algorítmica) apenas uma infinidade contável de números.

Outra questão relevante a ser lembrada, é o fato de que a probabilidade de que um número real tomado ao acaso seja incomputável é de 100%. Assim, a probabilidade de que o estado do "universo", em um instante qualquer, seja um conjunto de números incomputáveis é de 100%. A propósito, o próprio instante t poderia ser um número incomputável.

Logo, a determinação do estado em um instante t com precisão infinita é impossível **em princípio**, pois é impossível representar uma infinidade incontável de números irracionais.

7.3.5.2 Incomputabilidade da solução das equações diferenciais

A segunda característica do "Demônio de Laplace" está associada ao bloco (2) da figura 18.

b) Erudição científica completa (nomológica)

Conhecimento de todas as leis que "regem" o universo.

Será suficiente conhecer as leis que "regem" todos os fenômenos possíveis?

Não.

Suponhamos que tais leis sejam expressas em termos de equações diferenciais. Caso exista solução e ela seja única (o que nem sempre ocorre, como visto no subitem 3.3.1.3), a maior parte das soluções é incomputável, pois a maior parte das condições iniciais é incomputável.

Como visto no subitem 7.2.4.2, pode ocorrer, inclusive, de, a partir de condições iniciais computáveis, resultar em soluções incomputáveis.

Também como visto anteriormente, de forma geral, as equações diferenciais não possuem solução analítica e os métodos numéricos só podem fornecer uma infinidade computável e, portanto, enumerável de números ou funções.

7.3.5.3 Incomputabilidade dos cálculos e de números em geral

A terceira característica do "Demônio de Laplace" está associada ao bloco (3) e ao bloco (4) da figura 18.

c) Super-inteligência

Poder de computação: usando as leis matemáticas e os dados, calcula (determina) a situação de qualquer instante do universo.

Usaria o conjunto de leis finito (dado por b) e os dados com precisão numérica infinita (dado por a).

Será o poder de cálculo do "Demônio de Laplace" suficiente?

Não.

Mesmo que fosse possível medir uma grandeza com precisão infinita ou que o "Demônio de Laplace" pudesse "intuir" as condições iniciais incomputáveis, ele não poderia operar com tais números, não poderia usá-los em equações para calcular e nem obter um número incomputável como o resultado de operações.

O "Demônio de Laplace" seria incapaz de obter uma infinidade incontável de pontos de uma função-solução contínua (quase a totalidade do $\mathbb{R}$), pois não há meio de calculá-los. Logo, seria incapaz de calcular o estado do sistema-universo, em um instante t qualquer, para uma infinidade incontável de estados.

7.3.6 **O "Demônio de Laplace" e os sistemas caóticos**

Em termos práticos, a impossibilidade de obter e calcular números com exatidão infinita não seria um problema tão grave, já que muitos cálculos sempre foram feitos de forma aproximada e deram bons resultados para as aplicações a que estavam destinados. No entanto, em termos do "Demônio de Laplace", ou seja, em termos de fundamentação teórica, a existência de sistemas onde uma ínfima inexatidão tem grandes repercussões, constitui um sério problema. Os sistemas caóticos são um exemplo de sistemas físicos/matemáticos divergentes, onde a ausência de precisão infinita na determinação das condições iniciais torna impossível qualquer previsão de longo termo.

Hoje os sistemas caóticos são muito estudados e estão espalhados pelas mais diversas áreas da física e da engenharia. Talvez, o interesse meramente teórico pode tornar-se prático.

7.3.7 **Considerações sobre causalidade e previsibilidade no contexto do "Demônio de Laplace"**

As discussões sobre as capacidades do "Demônio de Laplace" delineiam uma distinção que é conceitualmente interessante: a diferença entre causalidade e previsibilidade.

Para esclarecer essa diferença, retoma-se a citação laplaciana:

> Podemos considerar o estado presente do universo como o efeito de um estado anterior e como a causa daquele que vai seguir. Uma inteligência que, em um instante dado, conhecesse todas as forças que animam a natureza e a situação respectiva daquilo que a compõe, aliás se ela fosse suficientemente vasta para submeter esses dados à análise, abrangeria, dentro da mesma fórmula, os movimentos dos maiores corpos do universo e dos átomos mais ligeiros: nada seria incerto para ela e o futuro, como o passado, estariam presentes aos seus olhos.

Segundo Earman (1986), esta declaração começa com um tom de causalidade e termina identificando determinismo com previsibilidade. Na concepção de Laplace, a causalidade e a possibilidade de previsão em princípio são vistos como inseparáveis. No entanto, é possível diferenciar as duas noções a partir das considerações matemáticas a respeito dos poderes do "Demônio de Laplace".

Existe um antiquíssimo debate sobre o termo causalidade, por ser ele bastante problemático. No entanto, é possível aceitar a causalidade segundo Laplace, pois ela parece compatível com a noção comum. Diz tal concepção:

> Podemos considerar o estado presente do universo como o efeito de um estado anterior e como a causa daquele que vai seguir.

Essa afirmação é muito difícil de ser refutada. De fato, pode até ser verdadeira.

Agora, a continuação da frase, que diz:

> Uma inteligência que, em um instante dado, conhecesse todas as forças que animam a natureza e a situação respectiva daquilo que a compõe, aliás se ela fosse suficientemente vasta para submeter esses dados à análise, abrangeria, dentro da mesma fórmula, os movimentos dos maiores corpos do universo e dos átomos mais ligeiros: nada seria incerto para ela e o futuro, como o passado, estariam presentes aos seus olhos.

é muito difícil de sustentar.

O que parece ser claro, através de todas as considerações feitas sobre o "Demônio de Laplace", é que a capacidade lógica de prever e de resolver problemas é limitada. A limitação não é apenas operacional (quantidade de informação, velocidade de cálculo, etc.), como muitos acreditam, mas de princípio. A possibilidade de previsão por meios matemáticos e lógicos "clássicos" encontram limites inerentes. É uma impossibilidade de calcular.

O determinismo foi uma das manifestações do pretensioso espírito cartesiano (espírito da modernidade) de que tudo pode ser submetido ao conhecimento científico e racional. A idéia de uma "onisciência em princípio" da ciência é um aspecto do excessivo racionalismo da cultura ocidental moderna. Não deixa de ser irônico o fato de encontrar a aleatoriedade completa, intrínseca e autêntica no seio daquilo que deveria ser a garantia de certeza: a matemática.

8 CONCLUSÕES

Retomando a primeira questão do capítulo 1:

Terá a matemática usada nas teorias físicas e nas ferramentas formais (cálculo) algum limite intrínseco?

Sempre tendo como referência o ponto de vista da lógica e da matemática "clássicas", sim. Existem limites intrínsecos na matemática usada nas teorias físicas e nas ferramentas formais.

Aprofunda-se o assunto retomando a segunda questão do capítulo1:

A crença na possibilidade de caracterizar completamente os fenômenos pela matemática de uma ou mais teorias físicas. Esta é a crença na exatidão das descrições e na total previsibilidade de **qualquer** sistema físico como algo possível em princípio. Tal crença é, inclusive, um pressuposto de trabalho em engenharia de sistemas e controle. Será, afinal, esta crença justificável como princípio teórico?

Não. Esta crença não se justifica como princípio teórico. É impossível caracterizar completamente através de números reais uma infinidade incontável de estados. Ao tomar, pelo menos uma coordenada real do estado (dado por $\mathbb{R}^n$) ao acaso, a probabilidade de que seja um número real absolutamente normal é de 100%.

A previsibilidade encarnada nas soluções (existentes e únicas) das equações diferenciais é ilusória, também. Quando as equações e as soluções gerais envolvidas são computáveis e as soluções existem e são únicas (o que nem sempre ocorre), as condições iniciais são, em geral, números reais absolutamente normais, o que resulta em soluções particulares incomputáveis. Os números computáveis são condições iniciais totalmente arbitrárias, pois sua incidência dentro da reta real é tão insignificante que a probabilidade de tomar uma delas ao acaso é de 0%. Além disso, pode ocorrer que apesar dos argumentos serem números computáveis, um valor particular da função pode ser um número incomputável. Agregado a isso, soluções analíticas são exceções, sendo necessário apelar para soluções numéricas. Como visto, os métodos numéricos são algoritmos que podem, no máximo, dar origem a números reais computáveis.

O "Demônio de Laplace" surgiu para resolver o problema da ignorância, que era considerado a causa para a imprevisibilidade e a aparente aleatoriedade dos fenômenos. Mas o problema é muito mais profundo, está na própria matemática. A matemática do contínuo (equações diferenciais e a noção de continuidade), ou de conjuntos que tenham a cardinalidade do contínuo (como o conjunto das funções f: $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$), apresentam um caráter de completa e inerente aleatoriedade. E, mesmo a adoção de grandezas discretas, como defendido pelo *pancomputacionalismo ôntico*, não garante que os problemas de incomputabilidade sejam resolvidos.

Nenhum conjunto de regras formais pode condensar a esmagadora maioria das entidades matemáticas (números, funções, conjuntos, etc.) incomputáveis. O estudo dos conjuntos infinitos possibilitou exaurir todas as possibilidades linguísticas. O limite da capacidade de cálculo e representação se restringe, em princípio, à cardinalidade $\aleph_0$.

A existência dos números incomputáveis significa a impossibilidade absoluta de previsão, mesmo que aproximada, de sistemas caóticos. Em termos práticos, a precisão infinita seria algo de interesse meramente teórico ou filosófico, mas, a existência de sistemas presentes na física e na engenharia que apresentam dinâmica caótica, poderão representar um problema "real" ao estudo preciso de fenômenos modelados por tal matemática. Inclusive, coloca questões sobre a acurácia das simulações computacionais, dado o fato de usar apenas números racionais e da limitação intrínseca dos métodos numéricos.

A física utiliza, assim, a linguagem matemática "clássica" para expressar suas teorias. No entanto, tal matemática possui certas limitações, as quais podem significar uma carência descritiva dos fenômenos físicos. Se a certas grandezas físicas associamos números reais surgirão alguns problemas e, mesmo que forem assumidas grandezas discretas, poderão existir limitações também.

Baseado nos autores consultados, não há menção aos seguintes problemas ou limitações, constituindo contribuições originais deste trabalho:

- Os sistemas caóticos são, **em princípio**, imprevisíveis;
- Ressaltar o cuidado com relação às simplificações em modelos de engenharia, tendo em vista as implicações da dinâmica caótica;
- As condições iniciais de grandezas contínuas são, como via de regra, incomputáveis com 100% de certeza;
- As soluções gerais computáveis de equações diferenciais tem, em geral, soluções particulares incomputáveis;
- A impossibilidade de cálculo de uma infinidade incontável de pontos particulares em domínios do $\mathbb{R}^n$;
- A limitação intrínseca dos métodos numéricos, que apenas podem fornecer resultados computáveis;

- A incompletude da matemática de uma física que assumisse grandezas discretas;
- Argumentar sobre a impossibilidade de previsão completa do “Demônio de Laplace” usando a idéia de equações diferenciais (incluindo sistemas caóticos) e os números incomputáveis;
- Refutar o pressuposto de descrição completa através da matemática das teorias físicas em engenharia de controle usando a noção de “Demônio de Laplace”
- Destacar o problema da simplificação tendo em vista os sistemas caóticos;
- Sumarizar em tabelas a computabilidade de diferentes conjuntos de entidades matemáticas em termos de cardinalidades;
- Classificar como procedimentos de decisão certos algoritmos informais usados em engenharia elétrica;

8.1 CONCLUSÕES SOBRE OS PROBLEMAS ABORDADOS DE SISTEMAS DE POTÊNCIA E ENGENHARIA DE CONTROLE

Os modelos usados em sistemas elétricos de potência são, sabidamente, simplificações e os resultados obtidos a partir de tais modelos são considerados “boas” aproximações. O que não era claramente reconhecido, é que, independentemente da “perfeição” do modelo (ou de usar séries de Taylor de ordem infinita), eles apresentam resultados inerentemente aproximados. Por exemplo, os métodos numéricos de *Gauss-Seidel* e o de *Newton-Raphson* para o cálculo de fluxo de carga fornecerá, na melhor das hipóteses, precisão arbitrária apenas para raízes que sejam números computáveis. Podem existir raízes ou soluções incomputáveis, mas cujo cálculo exato é impossível em princípio. A impossibilidade de calcular, exatamente, uma infinidade incontável de números pode ser uma das razões para alguns dos eventuais problemas de convergências. Esta é apenas uma conjectura, não sendo objeto da tese apurá-la. Outro exemplo é a resolução de equações diferenciais por métodos numéricos (Euler, Euler modificado, trapezoidal, Runge-Kutta, etc.). Estes métodos não têm a pretensão de serem exatos, mas, mesmo que a tivesse (se, por exemplo, o método de Runge-Kutta usasse a série de Taylor de ordem infinita), a função solução seria necessariamente descontínua e os pontos obtidos serão apenas números computáveis. Além disso, é bom recordar que a resolução das equações diferenciais proporcionam soluções aproximadas, já que os computadores fornecem apenas números racionais (ou irracionais computáveis), sendo, no geral, impossível alcançar soluções exatas.

Com relação às soluções em geral (analíticas ou numéricas), a função solução da equação de onda trafegante pode ser computável, no entanto, apenas uma infinidade contável de pontos podem ser calculados com precisão verdadeiramente arbitrária. A esmagadora maioria dos pontos não podem ser efetivamente calculados, pois constituem uma infinidade incontável de cardinalidade $\aleph_1$. Quando as condições iniciais são incomputáveis, as soluções particulares também o serão, mesmo que a solução geral seja uma função computável. É possível, também, que a solução de uma equação de onda não exista.

Quanto à equação de onda tridimensional, seu estudo mostrou que, apesar das condições iniciais serem computáveis, a solução pode ser incomputável e que, apesar dos argumentos serem números computáveis, um valor particular da função pode ser um número incomputável.

Em termos dos estudos de estabilidade transitória nos transitórios eletromecânicos, quando a modelagem de sistemas de potência é feita com equações diferenciais não-lineares, tais sistemas de potência poderiam apresentar dinâmica caótica. Investigar a respeito desta possibilidade pode constituir uma contribuição relevante.

Por outro lado, sabe-se que existem dispositivos de eletrônica de potência que apresentam comportamento caótico, como é o caso do conversor Cúk. Importantes variáveis de circuitos eletrônicos podem ser imprevisíveis no longo termo.

Com relação às implicações na engenharia de controle, fica a conclusão de que é impossível descrever completamente sistemas físicos caso suas grandezas sejam de fato contínuas e descritas por equações diferenciais.

Concluiu-se, também, que a "realidade" pode ser causal, mas isso não significa que sejamos capazes, nem em princípio, de fazer previsões precisas através de conhecimentos teóricos *a priori*.

Em termos práticos e de planejamento, a discussão sobre as possibilidades de previsão são relevantes, pois a crença no determinismo laplaciano ou de possibilidade computacional (em sentido amplo) de previsão pode estimular certas condutas e desestimular outras. Por exemplo, pode dar excessiva ênfase à busca de "soluções gerais" (matemáticas ou não) ou de simulações computacionais de modelos matemáticos ao invés de lançar mão de conhecimentos de outras áreas e explorar as particularidades para uma previsão específica.

É evidente que as aproximações funcionam e são essenciais para a prática da engenharia, mas é importante reconhecer suas limitações teóricas. Além disso, a existência de sistemas de potência com dinâmica caótica podem tornar a questão da simplificação e da precisão numérica relevantes.

Este trabalho é eminentemente teórico, mas aprofunda a percepção matemática e abre novas possibilidades a considerar quando o engenheiro resolve problemas. Por exemplo, a possibilidade de atribuir erros a "causas incomputáveis" e não a medições imprecisas ou ruído. Neste sentido, o estudo pode ter algum valor prático.

8.2 CRÍTICA AO CARTESIANISMO EM ENGENHARIA

De certa forma, na área de ciências exatas, em geral, acredita-se que tudo possa ser reduzido à matemática (como modelo de conhecimento e linguagem de descrição) e à física.

A engenharia segue este paradigma de simplificação, o qual provavelmente dificulta a abordagem e entendimento de muitos problemas.

Existe uma crença implícita na onisciência da matemática e da física, crença que leva os conhecimentos e os métodos destas disciplinas para além de seu escopo. A supervalorização destes conhecimentos trouxe uma tendência a desprezar outras áreas. O que, certamente, tem empobrecido o repertório de idéias e saberes do engenheiro. Muitos deles relevantes para o desempenho responsável e mais benéfico de sua profissão.

Essa fé na matemática e na física e desprezo por outros conhecimentos são oriundos, em grande medida, da filosofia de Descartes.

Pode-se dizer que o determinismo foi uma das manifestações do pretensioso espírito cartesiano (espírito da modernidade) de que tudo pode ser submetido ao conhecimento científico e racional. De certa forma, a famosa frase de Laplace sintetiza o **racionalismo cartesiano**, que afirma que absolutamente tudo tem alguma explicação racional e que tal explicação deve ser simples. A idéia de uma "onisciência em princípio" da ciência é uma amostra disso. Esse racionalismo teve um impacto profundo no pensamento e na cultura ocidentais e suas marcas são vistas até hoje. Tanto que observadores externos a esta cultura percebem este traço característico, como o investigador e observador perspicaz da ciência e cultura ocidentais, Tenzin Gyatso (o atual Dalai Lama), que comentou o seguinte

> [...] the basic premises and parameters set up by Western science can limit your ability to deal with certain realities. […] [there is] the notion that everything can and must be explained and accounted for. But when you encounter phenomena that you cannot account for, then there's a kind of tension created, it's almost a feeling of agony. (LAMA, CUTLER, 1998, p. 6, adendo nosso)

O pensamento de que, em princípio, é possível esgotar os fenômenos físicos através das leis da física, onde esgotar significa conhecer um fenômeno completamente pelo conhecimento exato de suas grandezas físicas, advém, basicamente, da retomada renascentista da matematização do estudo da natureza (tendo, em Galileu, o maior representante) e do pretensioso pensamento filosófico moderno fundado por Descartes.

Por que o espírito moderno é um espírito pretensioso? Porque ambicionava a totalidade do conhecimento e a totalidade do poder (de domínio e manipulação da natureza). Um espírito como este não poderia durar para sempre: a ciência e a reflexão filosófica contemporâneas têm apontado consistentemente para as limitações e a transitoriedade das idéias e teorias de toda espécie. Hoje, ambições de totalidade são vistas como uma postura ingênua. E a história da ciência corrobora com isso.

Um exemplo claro foi o programa formalista de Hilbert e sua crença básica na onipotência da matemática. Ele teve essa ambição de totalidade: esgotar toda a matemática em um único sistema formal. O seu sonho fracassou, mas tal como na ciência, houve um desenvolvimento que, invariavelmente, apontou para a complexidade (em contraposição à simplicidade) e para a ingenuidade da pretensão inicial.

Pode-se considerar a matemática "clássica" como uma linguagem humana que trata, entre outras coisas, de representar o mundo que nos rodeia. A física, como ciência, usa a matemática para descrever e/ou explicar os fenômenos naturais. A matemática conforma a perspectiva como tais fenômenos são estudados e compreendidos. Nestas conclusões, basta dizer que um mesmo objeto pode ser estudado de uma série de perspectivas. Não haveria uma perspectiva absoluta (objetiva), como quis propor o pensamento cartesiano.

Logo, não parece conveniente abraçar a visão fundacionista de ciência proposta por Descartes. O conhecimento se expande em um número crescente de áreas e de teorias. Segundo Morin (2001): "A doença da teoria está no doutrinarismo e no dogmatismo, que fecham a teoria sobre ela própria e a petrificam". A visão fundacionista cartesiana estimula isso. Um exemplo foi o que ocorreu com a teoria newtoniana. Acreditava-se que fosse a própria realidade física e essa crença redundou em seguidas frustrações.

Caso seja algo possível, uma eventual sistematização (ou “unificação”) do conhecimento não deverá passar pela redução cartesiana, mas, na melhor das hipóteses, por alguma espécie de articulação.

A postura cartesiana tende a enrijecer a forma como se apreciam os problemas, desestimulando a busca de alternativas e novas maneiras de pensar, coibindo, inclusive, a criatividade.

O famoso escritor estado-unidense Mark Twain (1835-1910) disse, em um sábio aforismo: “To a man with a hammer, everything looks like a nail”.

8.3 TRABALHOS FUTUROS

Além da eletrônica de potência, explorar a existência de comportamento caótico em outras áreas de sistemas de potência. Um assunto onde há possibilidade de encontrar tal comportamento é o de estabilidade transitória, cujo estudo lida com equações diferenciais não-lineares e, portanto, com potencial de dinâmica caótica. Caso não exista, este pode ser um campo novo e promissor de pesquisa.

Estudar em mais detalhe se as limitações dos computadores têm consequências mais sérias no estudo de sistemas caóticos. Em particular, a limitação representada pelo uso exclusivo de números racionais.

Estudar se problemas nas soluções numéricas ou simulações podem ter como causa algum tipo de incomputabilidade (como, por exemplo, incompletude formal), ao invés de atribuí-lo a imprecisões numéricas (nas medidas, de arredondamento, de truncamento, etc.), algum tipo de “ruído” ou alguma falha qualquer dos computadores.

Estudar os motivos para os problemas de convergência nos métodos Gauss-Seidel e Newton-Raphson. Verificar se tais problemas nos métodos numéricos são oriundos de questões de incompletude.

Quais são exatamente as consequências de considerar como contínuas grandezas quantizadas como a carga elétrica, por exemplo?

Aprofundar o estudo sobre a incomputabilidade da matemática e suas implicações em física e em engenharia. Como, por exemplo, estudos de radiações oriundas de linhas de transmissão.

Como este trabalho efetuou uma análise sobre fundamentos matemáticos, é difícil vislumbrar, de início, aplicações imediatas. Talvez, com o tempo, as aplicações surjam naturalmente.

REFERÊNCIAS

ALLIGOOD, K. T.; SAUER, T. D.; YORKE, J. A. **Chaos**: an introduction to dynamical systems. New York: Springer-Verlag, 1996. 603 p.

BASAK, B.; PARUI, S. Incompleteness of bifurcation diagram in predicting the behavior of Cúk converter in discontinuous conduction mode. **International Journal of Circuit Theory and Applications**, v. 36, p. 387-396, 2007.

BECHER, V.; FIGUEIRA, S.; PICCHI, R. Turing's unpublished algorithm for normal numbers. **Theoretical Computer Science**, v. 377, p. 126-138, 2007.

BERTALANFFY, L. von. **Teoria geral dos sistemas**. Petrópolis: Vozes, 1973. 350 p.

BOYER, C. B. **História da matemática**. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996. 496 p.

CAPRA, F. **A teia da vida**: uma nova compreensão científica dos sistemas vivos. 8. ed. São Paulo: Cultrix, 2003. 256 p.

CHAITIN, G. J. A century of controversy over the foundations of mathematics. In: CALUDE, C. S.; PAUN, G. **Finite versus Infinite**, London: Springer-Verlag, 2000. p. 75-100. Disponível em: <http://www.cs.auckland.ac.nz/~chaitin/lowell.html>. Acesso em: 10 abr. 2011.

______. Is incompleteness a serious problem? In: LOLLI, G; PAGALLO, U. **La complessità di Gödel**. Torino: G. Giappichelli, 2008. p. 65-69. Disponível em: < http://cs.umaine.edu/~chaitin/turin.html>. Acesso em: 09 jan. 2009.

______. Leibniz, Information, Math and Physics. In: INTERNATIONALEN WITTGENSTEIN-SYMPOSIUMS, 26., 2003, Wien. Wissen und Glauben (Knowledge and Belief). Wien: ÖBV & HPT, 2004. p. 277-286. Disponível em: <http://cs.umaine.edu/~chaitin/kirchberg.html>. Acesso em: 09 jan. 2009.

______. **MetaMat!**: em busca do ômega. São Paulo: Perspectiva, 2009. 314 p.

______. On the intelligibility of the universe and the notions of simplicity, complexity and irreducibility. In: DEUTSCHER KONGRESS FÜR PHILOSOPHIE, 19., 2002, Bonn.

Grenzen und Grenzüberschreitungen. Berlin: Akademie Verlag, 2004. p. 517-534. Disponível em: <http://cs.umaine.edu/~chaitin/bonn.html>. Acesso em: 09 jan. 2009.

______. Randomness in arithmetic and the decline and fall of reductionism in pure mathematics. **European Association for Theoretical Computer Science Bulletin**, n. 50, p. 314-328, 1993. Disponível em: <http://www.umcs.maine.edu/~chaitin/unm.html>. Acesso em: 01 nov. 2008.

______. The limits of reason. **Scientific American**, New York, v. 294, n. 3, p. 74-81, march 2006. Disponível em: <http://cs.maine.edu/~chaitin/sciamer3.html>. Acesso em: 10 jan. 2009.

CODDINGTON, E. A. **An introduction to ordinary differential equations**. New York: Dover Publications, 1989. 307 p.

COSTA, N. C. A. **Introdução aos fundamentos da matemática**. 4. ed. São Paulo: Hucitec, 2008. 94 p.

COSTA, N. C. A.; DORIA, F. A. Undecidability and incompleteness in classical mechanics. **International Journal of Theoretical Physics**, v. 30, n. 8, p. 1041-1073, 1991.

COSTA, N. C. A.; DORIA, F. A.; FURTADO do AMARAL, A. F. Dynamical system where proving chaos is equivalent to proving Fermat's conjecture. **International Journal of Theoretical Physics**, v. 32, n. 11, p. 2187-2206, 1991.

DAVIS, M. **Computability and unsolvability**. New York: Dover Publications, 1982. 257 p.

DEUTSCH, D. Quantum theory, the Church-Turing principle and the universal quantum computer. **Proceedings of the Royal Society**, v. 400, Series A, p. 97-117, 1985.

EARMAN, J. **A primer on determinism**. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 1986. 273 p.

ENCYCLOPAEDIA OF MATHEMATICS (EOM). Disponível em: <http://eom.springer.de/default.htm>. Acesso em: 16 abr. 2011.

ENDERTON, H. B. **A mathematical introduction to logic**. San Diego: Academic Press, 1972. 307 p.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Campinas: Editora da Unicamp, 2004. 844 p.

FEYNMAN, R. P. **Feynman lectures on computation**. New York: Addison-Wesley, 1996. 303 p.

______. Simulating physics with computers. **International Journal of Theoretical Physics**, v. 21, n. 6/7, p. 467-488, 1982a.

______. The character of physical law. Cambridge: MIT Press, 1982b. 173 p.

FIEDLER-FERRARA, N.; PRADO, C. **Caos**: uma introdução. São Paulo: Editora Blücher, 1994. 402 p.

FLAKE, G. W. **The computational beauty of nature**: computer explorations of fractals, chaos, complex systems and adaptation. Cambridge: MIT Press, 1998. 493 p.

FRANKS, R. G. E. **Mathematical Modeling in Chemical Engineering**. New York: John Wiley & Sons, 1966. 285 p.

FRANZÉN, T. The popular impact of Gödel's incompleteness theorem. **Notices of the American Mathematical Society**, v. 53, n. 4, p. 440–443, 2006. Disponível em: <http://www.ams.org/notices/200604/fea-franzen.pdf>. Acesso em: 11 jan. 2009.

FREDKIN, E.; TOFFOLI, T. Conservative logic. **International Journal of Theoretical Physics**, v. 21, n. 3-4, p. 219-253, 1982. Disponível em: <http://strangepaths.com/wp-content/uploads/2007/11/conservativelogic.pdf>. Acesso em: 26 dez. 2008.

GALILEI, G. **Diálogo sobre os dois máximos sistemas do mundo ptolomaico e copernicano**. Tradução, introdução e notas de Pablo Rubén Mariconda. 2.ed. São Paulo: Discurso/Imprensa Oficial, 2004. 882 p.

______. Duas novas ciências. Tradução e notas de Letizio Mariconda e Pablo Rubén Mariconda. São Paulo: Ched/Nova Stella, 1988. 287 p.

GEROCH, R.; HARTLE, J. B. Computability and physical theories. **Foundations of Physics**, v. 16, n. 6, p. 533-550, 1985.

GLEICK, J. **Caos**: a criação de uma nova ciência. 4. ed. Rio de Janeiro: Campus, 1991. 310 p.

GOLDSTEIN, R. **Incompleteness**: the proof and paradox of Kurt Gödel. New York: W. W. Norton, 2006. 224 p.

HAASER, N. B.; SULLIVAN, J. A. **Real analysis**. New York: Dover Publications, 1991. 352 p.

HAWKING, S. W. **Gödel and the end of physics**. Cambridge, University of Cambridge, 23 jul. 2002. Palestra proferida por ocasião do Dirac Centennial Celebration, Cambridge (UK), 2002. Disponível em: <http://www.damtp.cam.ac.uk/strings02/dirac/hawking/>. Acesso em: 28 dez. 2008.

HODGES, A. **Alan Turing**: the enigma. 2nd ed. London: Vintage Books, 1992. 588 p.

HOFSTADTER, D. R. **Gödel, Escher, Bach**: an eternal golden braid. New York: Basic Books, 1999. 800 p.

HUMES, A. F. P. C. et al. **Noções de cálculo numérico**. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1984. 201 p.

JAKI, S. L. A late awakening to Gödel in physics. **Sensus Communis**, v. 5, n. 2-3, p. 1-12, 2004. Disponível em: <http://pirate.shu.edu/~jakistan/JakiGodel.pdf>. Acesso em: 29 dez. 2008.

JOSÉ NETO, J. **Tópicos sobre os fundamentos da engenharia de computação**: PCS-5701. São Paulo, EPUSP, 2003. 45 p. Slides das aulas da disciplina de pós-graduação do Departamento de Engenharia de Computação e Sistemas Digitais, PCS-5701 – Tópicos sobre os fundamentos da engenharia de computação. Disponível em: <http://www.pcs.usp.br/~pcs5701/2003/index.html>. Acesso em: 22 mai. 2009.

KAPLAN, W. **Cálculo avançado**. São Paulo: Edgard Blücher, 1972. v. 2.

LAMA, D.; CUTLER, H. C. **The art of happiness**: a handbook for living. New York: Riverhead Books, 1998. 336 p.

LAPLACE, P. S. **Oeuvres complètes de Laplace**. Paris: Gauthier-Villars, 1878-1912. 14 v. Disponível em: <http://gallica.bnf.fr>. Acesso em: 01 dez. 2008.

LEWIS, H. R.; PAPADIMITRIOU, C. H. **Elements of the theory of computation**. 2nd ed. Upper Saddle River: Prentice-Hall, 1998. 361 p.

LISBOA, A. C. **Introdução ao Caos e a métodos de controle a partir do paradigma dinâmico circuito de Chua**. 2004. 134 p. Trabalho de Formatura - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2004.

MAGALHÃES, G. **Introdução à metodologia da pesquisa**: caminhos da ciência e tecnologia. São Paulo: Ática, 2005. 263 p.

MENDELSON, E. **Introduction to mathematical logic**. 3rd ed. Pacific Grove: Wadsworth & Brooks, 1987. 341 p.

MINSKY, M. L. **Computation**: finite and infinite machines. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1967. 317 p.

MORIN, E. **Introdução ao pensamento complexo**. 3. ed. Lisboa: Instituto Piaget, 2001. 177 p.

NAGEL, E.; NEWMAN, J. R. **A prova de Gödel**. 2. ed. São Paulo: Perspectiva, 2003. 100 p.

OGATA, K. **Engenharia de controle moderno**. 4. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2003. 790 p.

ORSINI, L. Q. **Curso de circuitos elétricos**. São Paulo: Edgard Blücher, 1993. v. 1. 318 p.

OTT, E. **Chaos in dynamical systems**. Cambridge: Cambridge University Press, 1993. 393 p.

PENROSE, R. **The emperor's new mind**: concerning computers, minds and the laws of physics. Oxford: Oxford University Press, 1999. 632 p.

PESSOA Jr., O. **Filosofia da física**: FLF-472. São Paulo, FFLCH-USP, 2009. 83 p. Notas de aula da disciplina de graduação para o Instituto de Física da USP, FLF-472 – Filosofia da Física. Disponível em: <http://www.fflch.usp.br/df/opessoa/FiFi-09.htm>. Acesso em: 14 ago. 2010.

______. Fisicalismo redutivo e sondas epistemológicas. In: ENCONTRO DA REDE PARANAENSE DE PESQUISA EM HISTÓRIA E FILOSOFIA DA CIÊNCIA, 3., 2005, Curitiba. **Anais do III Encontro da Rede Paranaense de Pesquisa em História e Filosofia da Ciência**. Curitiba: SCHLA/UFPR, 2005. p. 179-190. Disponível em: <http://www.filosofia.ufpr.br/docs/Anais III Encontro.pdf>. Acesso em: 22 nov. 2008.

POUR-EL, M. B.; RICHARDS, I. A computable ordinary differential equation which possesses no computable solutions. **Annals of Mathematical Logic**, v. 17, p. 61-90, 1979.

______. The wave equation with computable initial data such that its unique solutions is not computable. **Advances in of Mathematics**, v. 39, p. 215-239, 1981.

PROTTER, M. H.; MORREY, C. B. **A first course in real analysis**. 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 1991. 554 p.

PUGH, C. C. **Real mathematical analysis**. New York: Springer-Verlag, 2002. 450 p.

RASHID, M. H. **Power electronics circuits, devices and applications**. 3nd ed. Upper Saddle River: Prentice-Hall, 2004. 902 p.

REIS, L. B. **Sistema elétrico, interligação com a rede e transmissão de potência elétrica**: Curso de Supervisão Técnica de UTEs. São Paulo, IEE-USP, 2010. 89 p. Apostila da disciplina 5 do curso de especialização em supervisão técnica de UTEs do Instituto de Eletrotécnica e Energia da USP, Curso de Supervisão Técnica de UTEs – Sistema elétrico, interligação com a rede e transmissão de potência elétrica.

ROGERS, H. **Theory of recursive functions and effective computability**. 2nd ed. Cambridge: MIT Press, 1992. 483 p.

SANTOS, M. F. **Dicionário de filosofia e ciências culturais**. São Paulo: Matese, 1963. 4 v.

SHALLIT, J. **A Very Brief History of Computer Science**, 1995. Disponível em: <http://www.cs.uwaterloo.ca/~shallit/Courses/134/history.html>.

SLAUGHTER, D. R. N. **O paradigma complexo: a energia e a educação**. 2006. 83 p. Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2006.

SLAUGHTER, D. R. N.; GRIMONI, J. A. B. Computability of ordinary differential equations and limitations of forecasting in control engineering. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON INDUSTRY APPLICATIONS, 9., 2010, São Paulo. **Anais do 9th IEEE/IAS International Conference on Industry Applications**. São Paulo: IEEE/IAS, 2010. p. 1-5.

STANFORD ENCYCLOPEDIA OF PHILOSOPHY (SEP). Disponível em: <http://plato.stanford.edu/>. Acesso em: 16 abr. 2011.

STEVENSON, W. D. **Elements of power system analysis**. 4^{th} ed. Singapore: McGraw-Hill, 1982. 436 p.

STEWART, I. **Será que Deus joga dados?** A nova matemática do caos. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 1991. 336 p.

SUTNER, K. **Reasoning and Proving**, 2008. Disponível em: <http://www.logic.amu.edu.pl/images/4/44/Klaussutner.pdf>.

TURING, A. M. On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem. **Proceedings of the London Mathematical Society**, v. 42, n. 2, p. 230-265, 1937a. Disponível em: <http://www.dim.uchile.cl/~mkiwi/ma50b/08/paper-turing.pdf>. Acesso em: 28 dez. 2008.

______. On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem: a correction. **Proceedings of the London Mathematical Society**, v. 43, n. 2, p. 544-546, 1937b.

WIKIPÉDIA. Disponível em: <http://www.wikipedia.org>. Acesso em: 07 jun. 2009.

WOLFRAM, S. Computation theory of cellular automata. **Communications in mathematical physics**, v. 96, p. 15-57, 1984. Disponível em: <http://www.stephenwolfram.com/publications/articles/ca/84-computation/index.html>. Acesso em: 24 abr. 2011.

ZACHMANOGLOU, E. C.; THOE, D. W. **Introduction to partial differential equations with applications**. New York: Dover Publications, 1986. 421 p.

APÊNDICE A – MONOGRAFIA SOBRE GALILEU GALILEI

Monografia final, revisada, da disciplina FLF 5081 – "Teoria do Conhecimento e Filosofia da Ciência (As Duas Novas Ciências de Galileu Galilei e o Nascimento da Física Clássica)", cursada no Departamento de Filosofia da Faculdade de Filosofia e Ciências Humanas da USP (FFLCH-USP), intitulada "Primeira Jornada de 'Duas novas ciências' e a Segunda Jornada de 'Diálogos': uma comparação", que versa sobre tema complementar à presente tese. A monografia discute sobre alguns textos de Galileu e as influências recebidas e dadas por este famoso autor.

Introdução

Neste trabalho, duas partes de duas importantes obras de Galileu serão comparadas e discutidas: a 2ª jornada de *Diálogo sobre os dois máximos sistemas do mundo ptolomaico e copernicano* (ou, simplesmente, "Diálogo") e a 1ª jornada de Duas novas ciências (em italiano, *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* ou, simplesmente, "Discorsi").

O intuito é estudar algumas influências que Galileu recebeu, algumas de suas contribuições originais e alguns dos desdobramentos que sua obra suscitou.

Sobre o "Diálogo" e o "Discorsi"

O "Diálogo" é a obra mais conhecida de Galileu, foi publicado em 21 de fevereiro de 1632. Tem por objetivo mostrar o movimento (rotação e translação) da Terra por meio de uma explicação das marés. Para tanto, a argumentação é estruturada em quatro jornadas ("quatro dias de conversas"), onde:

1ª jornada: criticam-se os princípios da física aristotélica e certos fundamentos da teoria ptolomaica.

2ª jornada: defesa à rotação da Terra.

3ª jornada: defesa à translação da Terra.

4ª jornada: apresenta a teoria das marés.

As questões teóricas e matemáticas são evitadas, concentrando-se na discussão entre os sistemas cosmológicos copernicano e ptolomaico (o sistema idealizado pelo astrônomo Tycho Brahe, famoso na época, por exemplo, ficou esquecido).

Galileu realizou, no "Diálogo", uma defesa do sistema copernicano com a intenção de que fossem revistas a condenação da teoria de Copérnico e a proibição do livro deste (*De revolutionibus orbium Cælestium* (publicado em 1543)) pela Inquisição em 1616. Galileu tinha esperança de que o novo papa, que assumira pouco tempo antes da publicação do "Diálogo", Urbano VIII (anteriormente cardeal Maffeo Barberini), fosse ajudá-lo, já que era seu admirador. Enganou-se: o "Diálogo" foi proibido em agosto de 1632 e seu autor foi condenado em junho de 1633, à abjuração e ao confinamento sob a Inquisição. Galileu já havia tido problemas com a Inquisição por suas opiniões e críticas ao pensamento aristotélico, que era um dos alicerces da Igreja. Com o "Diálogo" reiterou seus ataques e, dessa vez, não foi poupado pela Inquisição.

A condenação, de certa forma, ajudou na elaboração do “Discorsi”. Este seria o tratado mecânico que os interlocutores do “Diálogo” citavam como obra de referência e autoridade nas questões discutidas. É possível que Galileu estivesse anunciando sua próxima obra.

O “Discorsi” é a obra de maior valor científico de Galileu (considerada, também, a mais madura), foi publicado em 1638 pelo holandês Louis Elzevier, que se encontrava fora do alcance da Inquisição, já que Galileu também fora proibido de publicar. Seu objetivo era apresentar as duas novas ciências propostas por Galileu: a resistência dos materiais e o movimento dos corpos. Ao contrário do “Diálogo”, o “Discorsi” é uma enunciação sistemática e geométrica de leis para essas novas ciências. Assim como o “Diálogo”, o “Discorsi” é composto por quatro jornadas (na edição original) onde:

1ª jornada: introdução geral às duas novas ciências.

2ª jornada: resistência dos materiais.

3ª jornada: teoria do movimento uniforme e do movimento uniformemente acelerado.

4ª jornada: movimento dos projéteis.

O “Diálogo” e o “Discorsi” formam um corpo. O Diálogo preparava o terreno tratando de derrubar o arcabouço conceitual medieval (filosofia natural) ditada pela filosofia aristotélica e suas distinções entre Céu e Terra, objetos graves e leves, etc. e o “Discorsi” levantava os novos alicerces que estruturaram a Física Clássica, em uma ciência mais unificada e universal.

Sobre a 2ª jornada do “Diálogo”

A preparação do “Diálogo” começou com a carta de Galileu a Francesco Ingoli em 1624. Esta carta continha o plano e a estratégia argumentativa da 2ª jornada do “Diálogo”. A intenção da 2ª jornada é responder às objeções mecânicas ao movimento de rotação da Terra.

O “Diálogo” como um todo não é um tratado de física ou mecânica. A 2ª jornada é a aplicação dos resultados que Galileu obteve em suas investigações dos movimentos naturais dos corpos quando trabalhava na Universidade de Pádua (1592-1610, período conhecido como período paduano).

A argumentação estava centrada na formulação do princípio de relatividade mecânica. Esse princípio estava inspirado no princípio de relatividade óptica do movimento de Copérnico. Portanto, tratava-se de um desenvolvimento mecânico do princípio de relatividade óptica.

O princípio de relatividade mecânica diz que para um observador no interior de um sistema mecânico lhe é impossível decidir se o sistema está em movimento ou repouso, pois todos (inclusive o observador) compartilham os mesmos movimentos do sistema. Ou seja, que aquilo que é percebido pelos sentidos fornece informações insuficientes para decidir sobre o movimento ou repouso da Terra. Galileu deu o exemplo do observador abaixo da coberta de um navio para ilustrar o princípio. No caso da 2ª jornada, são trabalhadas as objeções específicas ao movimento de rotação da Terra (o movimento de translação é estudado na 3ª jornada do “Diálogo”).

É interessante citar os argumentos aristotélicos e ptolomaicos contra o movimento de rotação da Terra.

Os argumentos aristotélicos são: o argumento do movimento violento, o argumento dos dois movimentos, o argumento do movimento natural e o argumento da queda vertical. Estes argumentos se baseiam na crença peripatética (sinônimo de aristotélico) de que os corpos só podem ter um tipo de movimento natural, que pode ser somente retilíneo ou somente circular. Outros movimentos são tidos como forçados, ou violentos.

Apesar de polêmicos quanto à autoria, os argumentos atribuídos a Ptolomeu são: o argumento das nuvens, o argumento dos pássaros, o argumento do vento e o argumento de extrusão (o mais polêmico de todos). Os três últimos foram refutados explicitamente por Galileu. O

argumento da extrusão foi refutado incorretamente, mas deu ensejo para desenvolvimentos posteriores em dinâmica.
Assim, de forma geral, todos esses argumentos são resolvidos pelo princípio de relatividade mecânica proposta por Galileu.
A 2ª jornada constitui uma verdadeira aula de Física sobre os movimentos.

Sobre a 1ª jornada do "Discorsi"

A 1ª jornada do "Discorsi" é a introdução do tratado mecânico de Galileu. Sendo farta em figuras, esquemas e demonstrações geométricas foi aqui que concretamente Galileu começou a propor a correspondência entre a matemática e os fenômenos naturais.
Esta 1ª jornada é dividida em duas partes.
A primeira parte aborda os conceitos relevantes ao estudo da resistência dos materiais (2ª jornada do "Discorsi") que são:

1. O fato, aparentemente paradoxal, da resistência das partes das máquinas tender a diminuir com o aumento das dimensões da máquina
2. Uma discussão sobre a estrutura da matéria
3. A causa da coesão dos sólidos.

A segunda parte lida com a teoria do movimento (3ª jornada e 4ª jornada) apresentando as seguintes idéias:

1. Independência entre a velocidade e a gravidade do corpo em queda livre
2. Consistência entre ciência geometrizada e a natureza (movimento uniformemente acelerado).

Sobre alguns aspectos de estilo e forma

Ambos os textos são compostos de forma dialógica (conversa entre interlocutores), estilo muito usado na Renascença. Os interlocutores no "Diálogo" e no "Discorsi" são os mesmos: Salviati, Sagredo e Simplício.
Filippo Salviati (1582-1614) e Giovanni Francesco Sagredo (1571-1620) foram amigos íntimos aos quais Galileu prestou homenagem (ambos já falecidos na época de elaboração e publicação das obras). Simplício foi um importante comentador de Aristóteles e viveu no século VI d. C.
No "Diálogo", os papéis estão bem demarcados: Salviati representa Galileu, Sagredo representa o homem com espírito renascentista (desempenhando o papel de árbitro) e Simplício representa o dogma da tradição ptolomaico-aristotélica. Esta caracterização contribui para configurar um esquema de debate.
Já no "Discorsi", os papéis não são tão claros: Salviati e Sagredo podem representar Galileu. Simplício, apesar de aristotélico, já não é tão dogmático e muda de opinião. Essa mudança em relação ao "Diálogo" se deveu ao fato do texto ser de caráter expositivo e não polêmico.
Tanto na 2ª jornada do "Diálogo" como na 1ª jornada do "Discorsi", Salviati tem grande participação. Sagredo participa relativamente pouco na 2ª jornada do "Diálogo", enquanto na 1ª jornada do "Discorsi" é ele que mais dialoga com Salviati.
Na 2ª jornada do "Diálogo", por defender as posições ptolomaico-peripatéticas, Simplício participa muito mais do que o faz na 1ª jornada do "Discorsi", onde aparece mais eventualmente.

Essas mudanças talvez representem a consolidação da nova forma de pensar, já que Salviati e Sagredo, que são os espíritos progressistas, dominam o diálogo relegando Simplício a um papel secundário, pois suas idéias foram superadas, sendo incapaz de acompanhar e contribuir para as novas ciências.
Com relação ao foco das conversas, a 2ª jornada do "Diálogo" é bastante objetiva no seu intuito de chegar a conclusões sobre o movimento de rotação da Terra, evitando dispersões na linha de raciocínio. Por outro lado, a 1ª jornada do "Discorsi" por ser uma introdução, parece ser mais um apanhado das principais idéias (que permearão o resto do livro em suas jornadas subseqüentes), que um texto dissertativo, que defende um ponto de vista e pretende chegar a alguma conclusão. Assim, é farto em digressões para poder discutir os diversos conceitos-chave que são relevantes para tratar a resistência dos materiais e o movimento dos corpos.
Finalmente, a forma de argumentação: a 2ª jornada do "Diálogo" se desenvolve predominantemente na forma de argumentação qualitativa com pouco uso de esquemas geométricos e quantitativos. Em contraste, na 1ª jornada do "Discorsi" são abundantes os desenhos e esquemas para ilustrar e ajudar nas explicações, que lançam mão de argumentação matemática (geométrica).
Essas diferenças são oriundas dos objetivos distintos de cada jornada e das obras como um todo.

Duas grandes influências sobre Galileu

Dois personagens, que através de seus trabalhos e pensamento, influenciaram profundamente e tiveram impactos evidentes sobre Galileu foram Arquimedes e Copérnico.
Arquimedes de Siracusa (287 a. C.– 212 a. C.) considerado o maior matemático antigo e fundador da mecânica era muito admirado por Galileu e foi decisivo para sua mecânica.
Nicolau Copérnico (1473-1543) em seu *De revolutionibus orbium Cœlestium* propôs uma teoria heliocêntrica (que já, na época, não era uma idéia nova, mas estava em contradição com a visão hegemônica), baseada em novos dados e cuja estrutura era capaz de explicar fenômenos que a teoria geocêntrica de Ptolomeu era incapaz.
Copérnico foi o grande motivador dos trabalhos mais importantes de Galileu. Este escreveu a Kepler, em uma carta de 4 de agosto de 1597: "... há muitos anos abracei a opinião copernicana, e por tal razão encontrei as razões de muitos efeitos naturais, os quais certamente não são explicáveis com as hipóteses comuns. Escrevi muitas razões e muitas objeções aos argumentos contrários, mas até agora não ousei publicá-las, assustado pela sorte do próprio Copérnico, nosso preceptor, o qual, ainda que para poucos tenha adquirido fama imortal...".
De um, Galileu compartilhava a mecânica, de outro, o sistema heliocêntrico e o alcance universal da razão (ambas juntas significaram todo um conjunto de implicações que, entre outras coisas, permitiu romper muitas barreiras impostas pela tradição). De ambos, compartilhava o gosto pela matemática.
Com estas informações em mente, o pensamento galileano pode ficar mais claro.

O copernicanismo

A grande importância do copernicanismo residiu na desestabilização do paradigma medieval (ditada por Aristóteles e que balizava o pensamento e as crenças das pessoas de então), em um sentido amplo. Teve várias consequências como, por exemplo, a transformação dos padrões científicos, que originou uma nova circunscrição da ciência através da reorganização das

disciplinas acadêmicas e das “carreiras”. Sobretudo, teve impactos na própria cultura e na visão de mundo vigentes.
Por quê? Porque o copernicanismo rompia com o conceito de ciência aristotélica ao colocar o Sol no centro do universo e rebaixar a Terra da sua centralidade, efetiva e simbólica, para um lugar periférico, ficando em um patamar não muito diferente daquele dos demais planetas. A Terra no centro do Universo é condizente com a idéia cristã de criação divina do Homem. Também impunha a razão ao mundo e não vice-versa.
Além disso, reivindicava-se a especificidade e autonomia das disciplinas científicas matemáticas (tradicionalmente, astronomia, ótica e mecânica) frente à filosofia natural e à teologia (que eram tidas como superiores). Como tudo o mais, na época, a ciência estava organizada segundo os padrões aristotélicos e esse quadro foi assim revirado.
Havia a pretensão copernicana de poder explicar as aparências sensíveis (para Kant, Copérnico inventou a categoria das aparências) mediante a estipulação de mecanismos reais subjacentes. Por exemplo, explicar as “alças” traçadas no firmamento terrestre pelos planetas como sendo a ultrapassagem destes pela Terra. Isso indicava uma união entre astronomia e mecânica as quais, juntas, invadiam o domínio da filosofia natural, já definida pela tradição.
Recordando que, na tradição aristotélica a astronomia, a ótica e a mecânica eram disciplinas matemáticas sendo consideradas como construtos puramente abstratos, elas não tinham valor explicativo da realidade. Com o copernicanismo, esse panorama começou a mudar.

Copernicanismo e o “Discorsi”

Recordando um trecho da carta de Galileu a Kepler de 1597: “... há muitos anos abracei a opinião copernicana, e por tal razão encontrei as razões de muitos efeitos naturais, os quais certamente não são explicáveis com as hipóteses comuns. Escrevi muitas razões e muitas objeções aos argumentos contrários...”.
Essa carta foi escrita justamente no período paduano ao qual remontam os trabalhos mecânicos de Galileu. Segundo o trecho da carta, é razoável concluir que, boa parte desses trabalhos tinha como objetivo encontrar evidências que respaldassem o ponto de vista copernicano. Provavelmente, toda a parte da teoria do movimento dos corpos foi idealizada para esse fim.
O “Discorsi” seria a formalização dos estudos do período paduano. Logo, parte da introdução, a 3ª jornada e a 4ª jornada foram resultados diretos do copernicanismo. Além disso, Copérnico atribuía um grande valor à matemática como instrumento de busca da verdade em meio às aparências vistas na realidade, posição ratificada por Galileu. Portanto, nesse aspecto, Copérnico se faz presente em todo o livro.

Galileu e suas contribuições

Galileu fez diversas contribuições, muitas delas não só originais, mas inovadoras e criativas. São atribuídas a ele as seguintes realizações:

- Invenção de uma ciência realmente nova: a resistência dos materiais.
- Descobrimento do efeito escala. Este era um motivo para a impossibilidade de existência de gigantes.
- Idealiza a composição de movimentos, onde em um movimento oblíquo nas proximidades da superfície da Terra, por exemplo, existe uma componente horizontal constante e uma componente vertical uniformemente variada.

- Elevação do “status” e aplicação da matemática no estudo da natureza. Ela foi estendida e adquiriu valor de verdade.
- Primeiro a colocar a exigência de verificação experimental no estudo da natureza, além de fazer a estruturação do método.
- Introduz idealizações e aproximações nas situações experimentais (por exemplo, eliminação da resistência do ar).
- Começou a construir uma ponte mais concreta para a unificação dos fenômenos físicos.
- Configura a Física Clássica como teoria matematizada com verificação experimental.
- Forneceu argumentos filosóficos sobre a autonomia científica (com experiências sensíveis e demonstrações necessárias que são suficientes para decidir sobre as questões naturais) e a universalidade da razão científica. Idéias que são fortes até hoje.
- Provavelmente, não foi o primeiro a lançar mão do gráfico de dois eixos (é bem possível que Descartes já o tivesse feito), mas talvez tenha sido o primeiro a relacionar velocidade e tempo em uma mesma representação. Algo tipicamente físico, largamente usado no ensino atual de Física.

Além dessas contribuições diretas podemos citar o encaminhamento que deu para vários avanços:

- Eliminar a distinção entre graves e leves, todos os corpos são pesados. Que provavelmente deu ensejo para o surgimento posterior do conceito de massa.
- Discussão dos indivisíveis e infinitesimais formulando as questões relevantes para o desenvolvimento do cálculo diferencial e integral.

Outras possíveis contribuições indiretas de Galileu serão ilustradas através de comentários a alguns trechos da 2ª jornada do “Diálogo”:
Pág. 273 (do “Diálogo” citado na bibliografia)
Salviati: Mas por qual linha reta? Porque se podem gerar infinitas e para todos os lados a partir da cavidade da cana e do ponto de separação entre a pedra e a cana.
Simplício: Move-se por aquela que está em linha reta com o movimento que fez a pedra com a cana.
Aqui Simplício não sabe expressar-se em termos matemáticos e Salviati o ajuda, usando o método maiêutico, a concluir que é na reta tangente ao ponto de separação.
O comentário é o seguinte: ao perguntar qual linha reta deve ser, entre uma infinidade delas, Galileu se aproximou da noção de vetor (mais especificamente, de vetor aplicado a um ponto).
O vetor é usado quando a pergunta “para onde?” faz sentido para uma grandeza. A velocidade é uma grandeza vetorial, já que a pergunta “velocidade para onde?” faz sentido.
De qualquer forma, este trecho provavelmente tinha apenas a intenção de fazer uma crítica ao desconhecimento matemático dos filósofos peripatéticos.
Pág.275 (do “Diálogo” citado na bibliografia)
Simplício: ...o projétil, girado velozmente pelo arremessador, ao separar-se deste retém o ímpeto de continuar seu movimento pela linha reta...
O comentário é: existe uma polêmica a respeito do princípio de inércia ter sido ou não enunciado corretamente por Galileu. Com relação ao exemplo específico suas conclusões estão corretas. Galileu falou em “reter o ímpeto”, hoje se diz conserva a quantidade de movimento (ou momento linear), que é outra forma de enunciar o princípio de inércia (1a lei de Newton).

Todas estas possíveis contribuições indiretas foram essenciais para a formação dos fundamentos da Física Clássica, lembrando que o próprio Newton reconheceu a contribuição de Galileu em seu trabalho.

Copernicanismo, Galileu e Física Clássica

Sem o copernicanismo, é de se duvidar que Galileu fizesse os estudos que realizou a respeito do movimento dos corpos. Esses estudos estão intimamente ligados a todo o desenvolvimento posterior da Física.

Sem Galileu, também é de se duvidar que surgisse a Física tal como a conhecemos hoje. Houveram outros copernicanos (Kepler e Bruno, por exemplo) e suas contribuições foram bastante diferentes às de Galileu. A combinação de fatores que Galileu reunia foi bastante singular: arquimediano (com relação à mecânica e à matemática), aristotélico (com relação à importância da experiência sensível), platônico (com relação às idealizações e também pela valorização da matemática), copernicano, ter personalidade e espírito combativo, hábil argumentador, etc. Galileu agregou a experiência e dizia ser capaz de explicar o copernicanismo. A Física Clássica assenta-se sobre a teoria matematizada e verificação experimental, todos fundamentos metodológicos lançados por esse singular Galileu. Muitos dos conteúdos ensinados contemporaneamente em Física não diferem muito de seus livros, além disso, diversas idéias em seus textos foram desenvolvidas e constituem boa parte da Física moderna. Sim, Galileu foi imprescindível.

Da época de Galileu, temos, até hoje, sem grandes alterações: o lançamento oblíquo, a queda dos corpos e o princípio de relatividade clássica. Todos estes tópicos são abordados no ensino médio e no ciclo básico de diversos cursos de graduação. O esquema explicativo é diferente, mas os fundamentos teóricos são basicamente os mesmos. Poderíamos dizer que o “Diálogo” apresentou algumas situações que são usadas como exemplos didáticos e o “Discurso” forneceu as bases para os equacionamentos, que hoje são mais algébricos e não tão geométricos.

O princípio de relatividade do movimento foi usado no começo do século XX por Albert Einstein na formulação da sua Teoria da Relatividade.

Nunca é demais lembrar que a Física teve um impacto tremendo sobre as demais ciências. Além disso, foi responsável por inúmeros desenvolvimentos da matemática.

Conclusões

O “Diálogo” era uma obra essencialmente polêmica no sentido de combater os dogmas e a visão de mundo vigentes na sua época de publicação. O “Discorsi” era um tratado científico pioneiro, pois apresentava as bases do novo formato da ciência física (e de tantas outras que lhe seguiram os passos). De certa forma, o “Diálogo” prepara a chegada do “Discorsi”.

As origens do pensamento científico moderno, que recebeu forte influência do pensamento galileano, ressoa até nossos tempos. Pode-se dizer que ainda hoje, o pensamento cinemático e dinâmico e seu princípio de composição (superposição) são centrais em muitas áreas aplicadas e de pesquisa como fundamento epistemológico e metodológico e o atomismo de Demócrito como fundamento ontológico. Todos esses fundamentos têm uma estrutura semelhante: uma forma mecanicista e reducionista de ver a realidade.

É interessante notar que a 2ª jornada do “Diálogo” mostra uma grande capacidade pedagógica (e retórica) para explicar princípios físicos por parte de Galileu e ótimos exemplos, que tiram partido da experiência cotidiana (senso comum?). Modernas técnicas de ensino aproveitam os conhecimentos prévios dos alunos e atribuem ao professor o papel de guia do aprendizado, questionando o aluno sobre sua forma de compreender certo assunto. Ora, método maiêutico

socrático, largamente usado por Galileu, fundamenta-se essencialmente nessas mesmas premissas. Infelizmente, é incomum ver professores atuais de Física usando exemplos semelhantes e com a capacidade pedagógica de Galileu. Neste sentido, parece que ele continua a frente no tempo.
Para finalizar, os conhecimentos adquiridos no curso foram importantes para a abertura e desenvolvimento de novas perspectivas. Compreender a formação e as origens do pensamento científico nos ajuda a desempenhar o ofício de cientista com mais consciência e propriedade. Muitas coisas estão mais claras agora.
Abriram-se novas fronteiras que serão exploradas daqui para frente.

Agradecimentos

Ao prof. Pablo Mariconda pelo ótimo curso e aos colegas por instigantes conversas sobre os temas que as aulas nos suscitaram.

Bibliografia

GALILEI, G. Carta de Galileu Galilei a Francesco Ingoli. Scientiae Studia, 3, 3, p. 477-516, 2005

______. Diálogo sobre os dois máximos sistemas do mundo ptolomaico e copernicano. Tradução, introdução e notas de Pablo Rubén Mariconda. 2.ed. São Paulo: Discurso Editorial/Imprensa Oficial, 2004. 882 p.

______. Duas novas ciências. Tradução e notas de Letizio Mariconda e Pablo Rubén Mariconda. São Paulo: Ched Editorial/Nova Stella, 1988. 287 p.

______. O Ensaiador. Coleção Os Pensadores. São Paulo: Nova Cultural, 1999. 256 p.

PERRENOUD, P. Dez novas competências para ensinar. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 2000. 192 p.

THUILLIER, P. De Arquimedes a Einstein: A face oculta da invenção científica. Tradução de Maria Inês Duque-Estrada. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor, 1994. 257 p.