Categorias e Adaptatividade

João Kogler
Escola Politécnica
Universidade de São Paulo

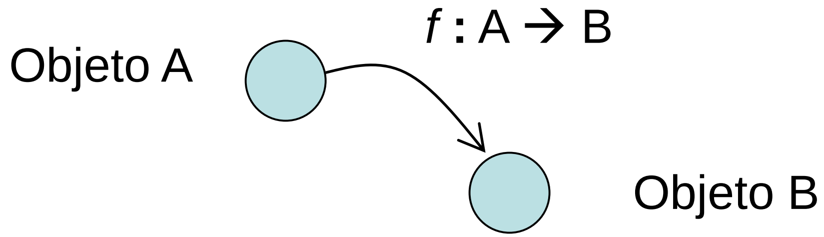
Janeiro 2015

Categorias e Adaptatividade

- Trabalho anterior
  - Monteiro, J.L.R., Kogler Jr., J.E. (2009) - Uma abordagem de autômatos adaptativos usando Teoria de categorias – WTA 2009
- Tutorial
  - Conceito de categoria, exemplos
  - Teoria de categorias
  - Aplicações – modelagem da adaptatividade

Categorias

- O que é uma categoria ?
  - Uma categoria é um par de coleções:
    - Coleções de:
      - **Objetos**
      - **Relações** entre objetos

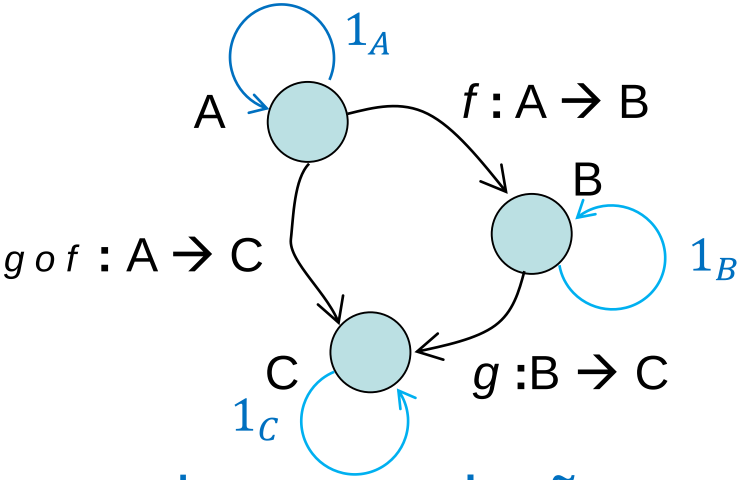


  - tais que:

Categorias

– Uma categoria é um par de coleções:

- Coleções de:
  - **Objetos**
  - **Relações** entre objetos
    - » tais que:

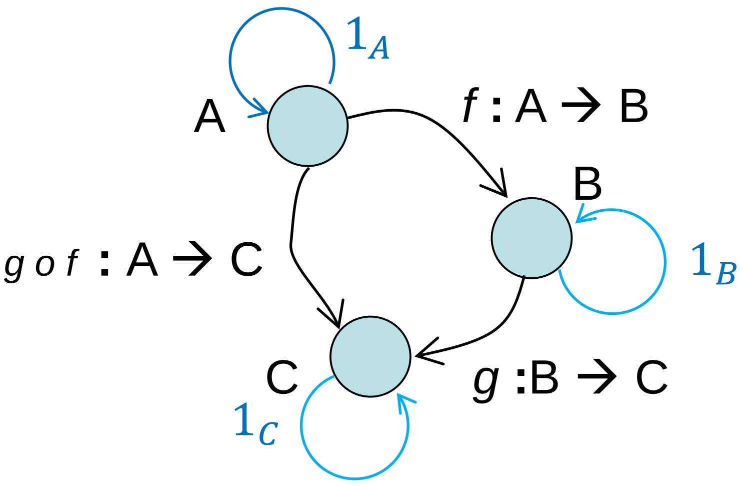


1. A cada objeto deve corresponder uma relação identidade: $\forall\, A$, $\exists\; 1_A : A \rightarrow A$
2. Dadas duas relações $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$, existe a relação composta designada por $f o g : A \rightarrow C$
3. A composição de relações é associativa

Categorias

- Notação e nomenclatura:

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$



- ou

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \arrow[d, "g"] \\ & C \end{tikzcd}$$

- As relações em uma categoria são denominadas **morfismos**

Exemplos

- Categoria Set
  - Os objetos são conjuntos
  - Os morfismos são funções entre conjuntos
- Categoria Pos
  - Os objetos são conjuntos parcialmente ordenados (posets)
  - Os morfismos são funções monotônicas
- Categoria Vect
  - Os objetos são espaços vetoriais
  - Os morfismos são transformações lineares

Exemplos

- Um só objeto, um só morfismo
  - $1_A : A \rightarrow A \;\;,\;\; 1_A \, o \, 1_A = 1_A$
- Nenhum objeto, nenhum morfismo
- Só objetos (e seus morfismos identidade)
- Um só objeto, (seu morfismo identidade) e diversos outros morfismos
  - Por exemplo, um grupo de simetrias rotacionais

Exemplos

- Categoria Graph
  - Objetos: grafos
  - Morfismos: homomorfismos de grafos
- Categoria monóide livre sobre Σ
  - Objeto (só um): cadeia vazia $*$
  - Morfismos: símbolos de um alfabeto Σ
  - A composição de morfismos corresponde à concatenação dos símbolos. Exemplo:

$$\begin{tikzcd} * \arrow[r, "d"] \arrow[rrrr, bend right, "word"'] & * \arrow[r, "r"] & * \arrow[r, "o"] & * \arrow[r, "w"] & * \end{tikzcd}$$

Exemplos

– Categoria Σ-Seq

- Objetos: Σ-reconhecedores de cadeias de símbolos do alfabeto finito Σ
  - Os objetos são dados pela quádrupla (Q,δ,q_0,F), onde
    - Q: conjunto finito de estados
    - δ**:** $\Sigma \times Q \rightarrow Q$ é o mapa de transições de estados
    - q_0 é o estado inicial
    - F : conjunto de estados finais
- Morfismos: f **:** $(Q,\delta,q_0,F), \rightarrow (Q',\delta',q'_0,F')$
  - Tipo particular de morfismo: *Simulações*
    - » É um morfismo tal que:
      - $\delta'(\sigma , f(q)) = f(\delta(\sigma , q))$
      - $f(q_0) = q'_0$

$$\begin{tikzcd} \Sigma \times Q \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "f"'] & Q \arrow[d, "f"] \\ \Sigma \times Q' \arrow[r, "\delta'"] & Q' \end{tikzcd}$$

Diagrama comutativo

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u_1"] \arrow[d, "v_1"] & Y \arrow[d, "v_2"] \\
Tx \arrow[r, "u_2"] & Ty
\end{tikzcd}
$$

y = u1(x)
Ty = v2(y)

Tx = v1(x)
Ty = u2(Tx)

Ty = u2v1(x)
Ty = v2u1(x)

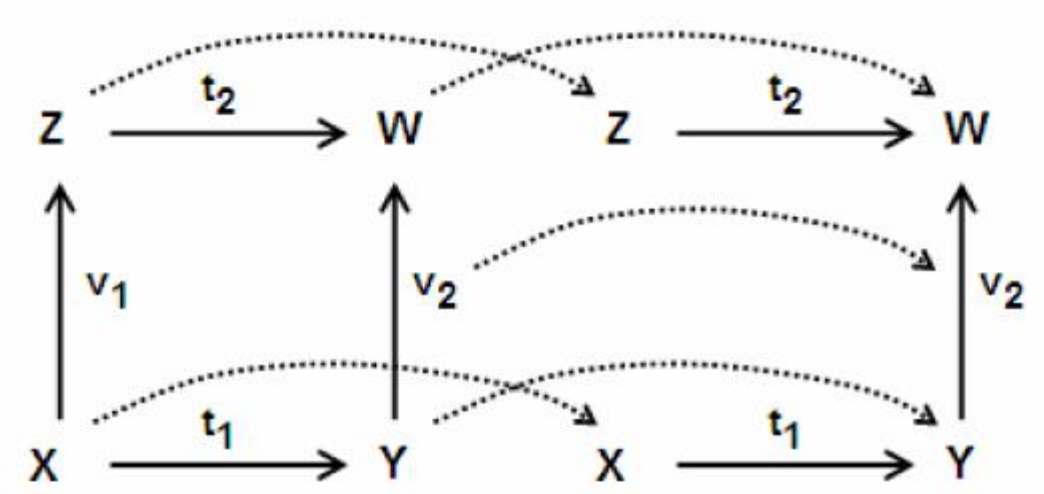
u2v1(x) = v2u1(x)

Diagrama comutativo: nesse diagrama são expressos morfismos comutativos entre X e Tx e Y e Ty.

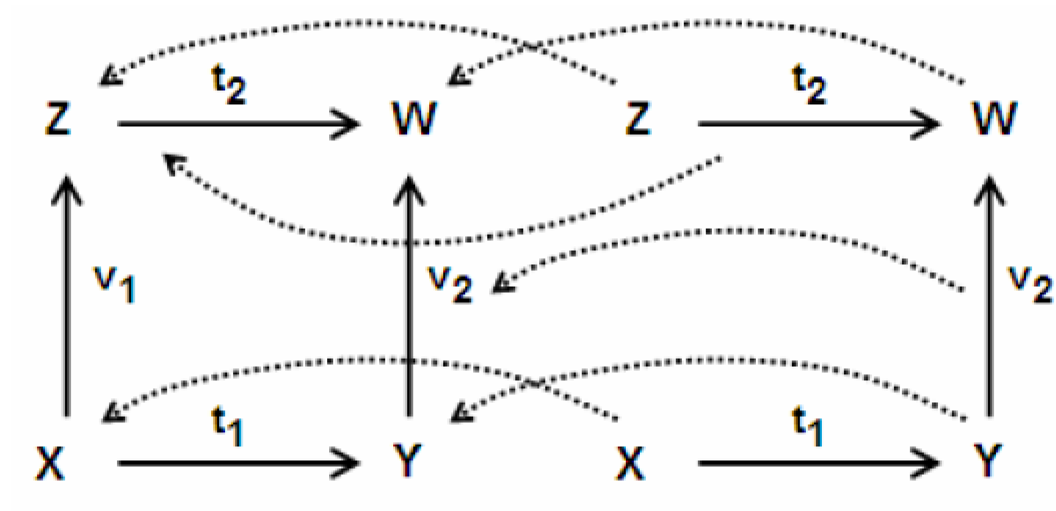
Categorias de categorias

- Categoria em que cada objeto é uma categoria
  - Nesse caso os morfismo passam a ser denominados *funtores*
    - Funtores têm estrutura mais complexa que morfismos em geral

WTA 2015



Funtor Esquecimento: Transforma uma categoria, removendo-lhe parte da estrutura.



Funtor Livre: transforma uma categoria, adicionando nova estrutura.

Lista de Categorias notáveis

Category	Objects	Arrows
$\boldsymbol{Set}$	sets	total functions
$\boldsymbol{Pfn}$	sets	partial functions
$\boldsymbol{Set}_{\perp}$	pointed sets	point preserving functions
$\boldsymbol{RelH}$	sets with a relation	relation respecting functions
$\boldsymbol{Sgp}$	semigroups	morphisms
$\boldsymbol{Mon}$	monoids	morphisms
$\boldsymbol{CMon}$	commutative monoids	morphisms
$\boldsymbol{Grp}$	groups	morphisms
$\boldsymbol{AGrp}$	abelian groups	morphisms
$\boldsymbol{Rng}$	rings	morphisms
$\boldsymbol{CRng}$	commutative rings	morphisms
$\boldsymbol{Pre}$	pre-ordered sets	monotone maps
$\boldsymbol{Pos}$	posets	monotone maps
$\boldsymbol{Sup}$	complete posets	$\bigvee$-preserving monotone functions
$\boldsymbol{Join}$	posets with all finitary joins	$\vee$-preserving monotone functions
$\boldsymbol{Inf}$	complete posets	$\bigwedge$-preserving monotone functions
$\boldsymbol{Meet}$	posets with all finitary meets	$\wedge$-preserving monotone functions
$\boldsymbol{Top}$	topological spaces	continuous maps
$\boldsymbol{Top}_{*}$	pointed topological spaces	point preserving continuous maps
$\boldsymbol{Top}^{\mathrm{open}}$	topological spaces	continuous open maps
$\boldsymbol{Vect}_K$	vector spaces over a given field K	linear transformations
$\boldsymbol{Set}\text{-}R$	sets with a right action from a given monoid R	action preserving functions
$R\text{-}\boldsymbol{Set}$	sets with a left action from a given monoid R	action preserving functions
$\boldsymbol{Mod}\text{-}R$	right R-modules over a ring R	morphisms
$R\text{-}\boldsymbol{Mod}$	left R-modules over a ring R	morphisms

Fonte: Simmons(2011)

Estruturas algébricas fundamentais

WTA 2015

Group-like structures. The entries say whether the property is *required*.					
	Totality*	Associativity	Identity	Divisibility	Commutativity
Semicategory	No	Yes	No	No	No
Category	No	Yes	Yes	No	No
Groupoid	No	Yes	Yes	Yes	No
Magma	Yes	No	No	No	No
Quasigroup	Yes	No	No	Yes	No
Loop	Yes	No	Yes	Yes	No
Semigroup	Yes	Yes	No	No	No
Monoid	Yes	Yes	Yes	No	No
Group	Yes	Yes	Yes	Yes	No
Abelian Group	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes

*Closure, which is used in many sources, is an equivalent axiom to totality, though defined differently.

Fonte: Wikipedia

Categoria Aut de autômatos finitos

Formalmente, os autômatos finitos podem ser especificados pelas 6-uplas:

$A = (I, O, S, s0, t, p)$, na qual:

- I é o conjunto de símbolos de entrada;
- O é o conjunto de símbolos de saída;
- S representa o conjunto de estados;
- $s0$ é o estado inicial;
- $t: I \times S \to S$ representa a função de transições;
- $p: I \times S \to O$ representa a função de saída.

Modelagem de autômato finito

Sejam A e A' dois automatos finitos. Um morfismo f entre A e A' escreve-se como:

$f = (fI, fO, fS) : A \rightarrow A'$, tal que:

$fS(s0) = s0'$ (preservação do estado inicial)

$fS(t(i,s)) = t'(fI(i), fS(s))$ (preservação das transições)

$fO(p(i,s)) = p'(fI(i), fS(s))$ (preservação das saídas)

A categoria ***Aut*** dos autômatos finitos pode ser escrita como

- $Aut = (Obj(Aut), Mor(Aut), Comp(Aut), Ident(Aut))$
- $Obj(Aut)$: $A = (I, O, S, s0, t, p)$
- $Mor(Aut)$: $f = (fI, fO, fS) : A \rightarrow A'$
- $Comp(Aut)$: a composição é associativa, pois as componentes do morfismo operam nos conjuntos I, O, S;
- $Ident(Aut)$: a identidade se dá pelo morfismo que preserva a identidade nos conjuntos I, O, S.

Ferramentas de categorias

- Estudo de generalizações
  – Produtos e coprodutos
  – Limites e colimites, spans e cospans
  – Pullbacks e pushouts
- Conceitos adicionais
  – Transformações naturais
  – Adjunções

Obrigado !

Perguntas ?

João Kogler
kogler@usp.br