

Categorias e Adaptatividade

João Kogler

Escola Politécnica

Universidade de São Paulo

Janeiro 2015

Categorias

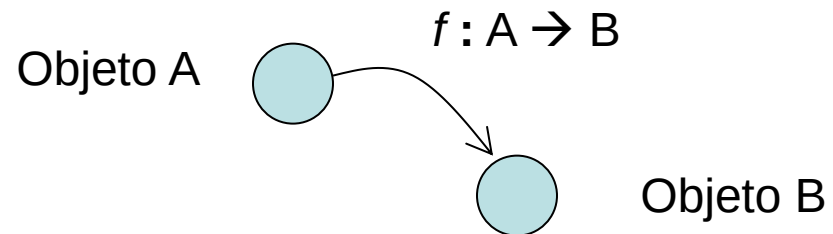
WTA 2015

- O que é uma categoria ?

Categorias

WTA 2015

- O que é uma categoria ?
 - Uma categoria é um par de coleções:
 - Coleções de:
 - **Objetos**
 - **Relações** entre objetos



- tais que:

Categorias

WTA 2015

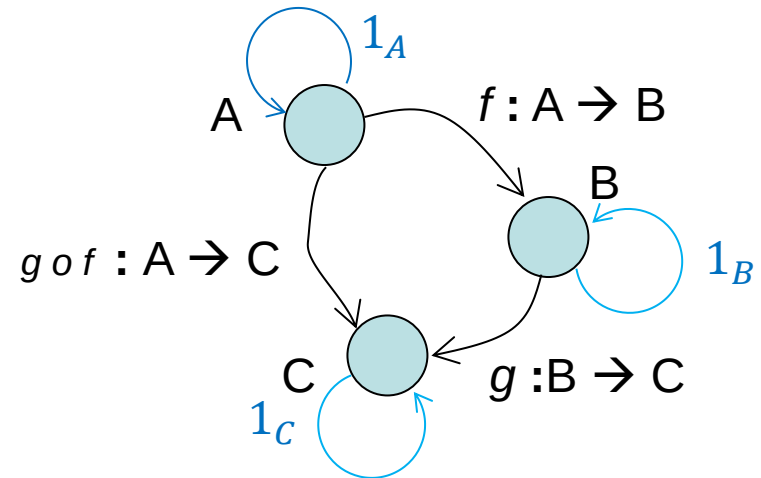
– Uma categoria é um par de coleções:

- Coleções de:

- **Objetos**

- **Morfismos**

» tais que:



1. A cada objeto deve corresponder um morfismo identidade: $\forall A, \exists 1_A: A \rightarrow A$
2. Dados dois morfismos $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$, existe o morfismo composto designado por $f \circ g: A \rightarrow C$
3. A composição de morfismos é associativa

Categorias

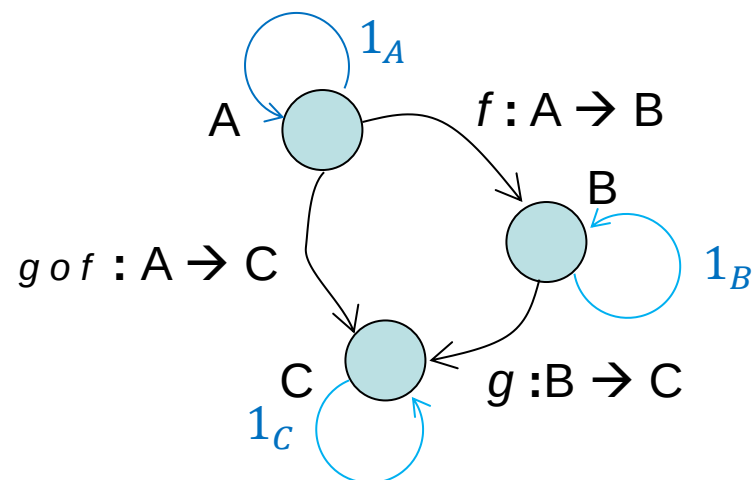
WTA 2015

- Notação e nomenclatura:

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

- ou

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ & & \downarrow g \\ & & C \end{array}$$



- As relações em uma categoria são denominadas **morfismos**

Diagrama comutativo

WTA 2015

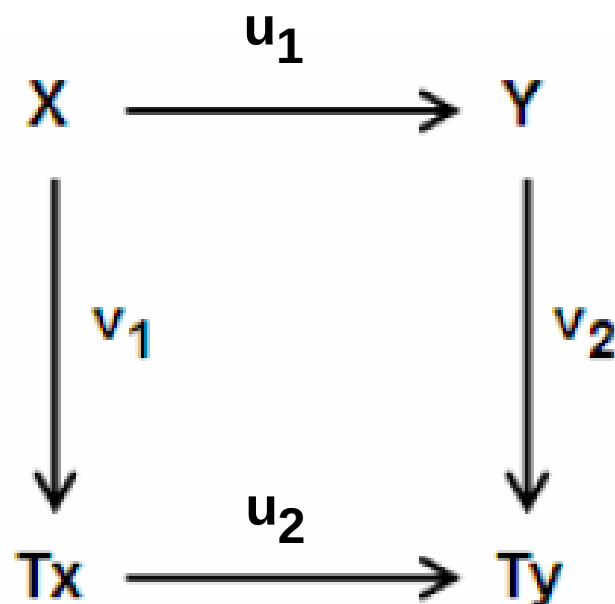


Diagrama comutativo: nesse diagrama são expressos morfismos comutativos entre X e Tx e Y e Ty .

Exemplo (Adámek et al, 2004)

WTA 2015

– Categoria Σ -Seq

- Objetos: Σ -reconhecedores de cadeias de símbolos do alfabeto finito Σ

– Os objetos são dados pela quádrupla (Q, δ, q_0, F) , onde

Q : conjunto finito de estados

$\delta: \Sigma \times Q \rightarrow Q$ é o mapa de transições de estados

q_0 é o estado inicial

F : conjunto de estados finais

- Morfismos: $f: (Q, \delta, q_0, F) \rightarrow (Q', \delta', q'_0, F')$

– Tipo particular de morfismo: *Simulações*

» É um morfismo tal que:

$$\delta'(\sigma, f(q)) = f(\delta(\sigma, q))$$

$$f(q_0) = q'_0$$

$$\begin{array}{ccc} \Sigma \times Q & \xrightarrow{\delta} & Q \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ \Sigma \times Q' & \xrightarrow{\delta'} & Q' \end{array}$$

Exemplo (Adámek *et al*, 2004)

WTA 2015

– Categoria Σ -Seq

- Objetos: Σ -reconhecedores de cadeias de símbolos do alfabeto finito Σ

– Os **objetos** R são quádruplas (Q, δ, q_0, F)

- Morfismos: $f : (Q, \delta, q_0, F) \rightarrow (Q', \delta', q'_0, F')$

– Tipo *Simulações* $R \rightarrow R'$

» tal que:

$$\delta'(\sigma, f(q)) = f(\delta(\sigma, q))$$

$$f(q_0) = q'_0$$

$$\begin{array}{ccc} \Sigma \times Q & \xrightarrow{\delta} & Q \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ \Sigma \times Q' & \xrightarrow{\delta'} & Q' \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{ccc} R & & \\ \downarrow f & & \\ R' & & \end{array}$$

Exemplo (Adámek et al, 2004)

WTA 2015

– Categoria Σ -Seq

- Composição de morfismos:

– Tipo *Simulações* $R \rightarrow R' \rightarrow R''$



» tal que:

$$\delta'(\sigma, f(q)) = f(\delta(\sigma, q))$$

$$f(q_0) = q'_0$$

$$\delta''(\sigma', g(q')) = g(\delta'(\sigma', q'))$$

$$g(q'_0) = q''_0$$

$$\begin{array}{ccc} \Sigma \times Q & \xrightarrow{\delta} & Q \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ \Sigma \times Q' & \xrightarrow{\delta'} & Q' \\ g \downarrow & & \downarrow g \\ \Sigma \times Q'' & \xrightarrow{\delta''} & Q'' \end{array} \quad \begin{array}{c} R \\ \downarrow \\ R' \\ \downarrow \\ R'' \end{array}$$

Exemplo (Adámek *et al*, 2004)

WTA 2015

– Categoria Σ -Seq

- Composição de morfismos:

$$\delta'(\sigma, f(q)) = f(\delta(\sigma, q))$$

$$f(q_0) = q'_0$$

$$\delta''(\sigma', g(q')) = g(\delta'(\sigma', q'))$$

$$g(q'_0) = q''_0$$

$$\delta''(\sigma, g \circ f(q)) = g \circ f(\delta(\sigma, q))$$

$$g \circ f(q_0) = q''_0$$

$$\begin{array}{ccc} \Sigma \times Q & \xrightarrow{\delta} & Q \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ \Sigma \times Q' & \xrightarrow{\delta'} & Q' \\ g \downarrow & & \downarrow g \\ \Sigma \times Q'' & \xrightarrow{\delta''} & Q'' \end{array} \quad \begin{array}{c} R \\ \downarrow \\ R' \\ \downarrow \\ R'' \end{array}$$

Exemplo (Adámek *et al*, 2004)

WTA 2015

– Categoria Σ -Seq

- Composição de morfismos:

$$\delta'(\sigma, f(q)) = f(\delta(\sigma, q))$$

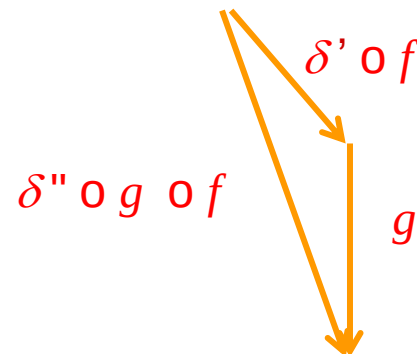
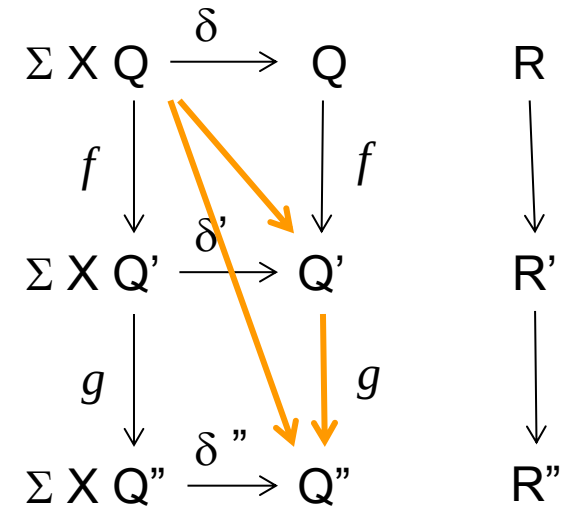
$$f(q_0) = q'_0$$

$$\delta''(\sigma', g(q')) = g(\delta'(\sigma', q'))$$

$$g(q'_0) = q''_0$$

$$\delta''(\sigma, g \circ f(q)) = g \circ f(\delta(\sigma, q))$$

$$g \circ f(q_0) = q''_0$$



Exemplos (Adámek et al, 2004)

WTA 2015

– Categoria Aut

- Objetos: autômatos finitos (Adámek et al)

- Os objetos são dados pela sêxtupla $(Q, \Sigma, Y, \delta, q_0, y)$, onde

- Q : conjunto finito de estados

- Σ e Y : conjuntos de símbolos de entrada e de saída resp/

- $\delta: \Sigma \times Q \rightarrow Q$ é o mapa de transições de estados

- q_0 é o estado inicial

- $y: Q \rightarrow Y$ é o mapa de saída

- Morfismos: $3\text{-}f: (Q, \Sigma, Y, \delta, q_0, y) \rightarrow (Q', \Sigma', Y', \delta', q'_0, y')$

- $3\text{-}f$ é a tripla (f_Q, f_Σ, f_Y)

- $f_Q: Q \rightarrow Q'$

- $f_\Sigma: \Sigma \rightarrow \Sigma'$

- $f_Y: Y \rightarrow Y'$

Exemplos (Adámek et al, 2004)

WTA 2015

– Categoria Aut

Morfismos: $3\text{-}f : (Q, \Sigma, Y, \delta, q_0, y) \rightarrow (Q', \Sigma', Y', \delta', q'_0, y')$

3-f é a tripla (f_Q, f_Σ, f_Y)

$$f_Q : Q \rightarrow Q'$$

$$f_\Sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma'$$

$$f_Y : Y \rightarrow Y'$$

Obs. $\delta : \Sigma \times Q \rightarrow Q$

$$y : Q \rightarrow Y$$

Exemplos (Adámek et al, 2004)

WTA 2015

– Categoria Aut

Morfismos: $3\text{-}f : (Q, \Sigma, Y, \delta, q_0, y) \rightarrow (Q', \Sigma', Y', \delta', q'_0, y')$

3-f é a tripla (f_Q, f_Σ, f_Y)

$$f_Q : Q \rightarrow Q'$$

$$f_\Sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma'$$

$$f_Y : Y \rightarrow Y'$$

$$\Sigma \times Q \xrightarrow{\delta} Q \xrightarrow{y} Y$$

Obs. $\delta : \Sigma \times Q \rightarrow Q$

$$y : Q \rightarrow Y$$

Exemplos (Adámek et al, 2004)

WTA 2015

– Categoria Aut

Morfismos: $3\text{-}f : (Q, \Sigma, Y, \delta, q_0, y) \rightarrow (Q', \Sigma', Y', \delta', q'_0, y')$

3-f é a tripla (f_Q, f_Σ, f_Y)

$$f_Q : Q \rightarrow Q'$$

$$f_\Sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma'$$

$$f_Y : Y \rightarrow Y'$$

$$\Sigma \times Q \xrightarrow{\delta} Q \xrightarrow{y} Y$$

$$\Sigma' \times Q' \xrightarrow{\delta'} Q' \xrightarrow{y'} Y'$$

Obs. $\delta : \Sigma \times Q \rightarrow Q$

$$y : Q \rightarrow Y$$

Exemplos (Adámek et al, 2004)

WTA 2015

– Categoria Aut

Morfismos: $3\text{-}f : (Q, \Sigma, Y, \delta, q_0, y) \rightarrow (Q', \Sigma', Y', \delta', q'_0, y')$

3-f é a tripla (f_Q, f_Σ, f_Y)

$$f_Q : Q \rightarrow Q'$$

$$f_\Sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma'$$

$$f_Y : Y \rightarrow Y'$$

$$\begin{array}{ccccc} \Sigma \times Q & \xrightarrow{\delta} & Q & \xrightarrow{y} & Y \\ f_Q \downarrow & & \downarrow f_Q & & \\ \Sigma' \times Q' & \xrightarrow{\delta'} & Q' & \xrightarrow{y'} & Y' \end{array}$$

Obs. $\delta : \Sigma \times Q \rightarrow Q$

$y : Q \rightarrow Y$

Exemplos (Adámek et al, 2004)

WTA 2015

– Categoria Aut

Morfismos: $3\text{-}f : (Q, \Sigma, Y, \delta, q_0, y) \rightarrow (Q', \Sigma', Y', \delta', q'_0, y')$

3-f é a tripla (f_Q, f_Σ, f_Y)

$$f_Q : Q \rightarrow Q'$$

$$f_\Sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma'$$

$$f_Y : Y \rightarrow Y'$$

$$\begin{array}{ccccc} \Sigma \times Q & \xrightarrow{\delta} & Q & \xrightarrow{y} & Y \\ f_\Sigma \downarrow & f_Q \downarrow & \downarrow f_Q & & \downarrow f_Y \\ \Sigma' \times Q' & \xrightarrow{\delta'} & Q' & \xrightarrow{y'} & Y' \end{array}$$

Obs. $\delta : \Sigma \times Q \rightarrow Q$

$y : Q \rightarrow Y$

Exemplos (Adámek et al, 2004)

WTA 2015

– Categoria Aut

Morfismos: $3\text{-}f : (Q, \Sigma, Y, \delta, q_0, y) \rightarrow (Q', \Sigma', Y', \delta', q'_0, y')$

3-f é a tripla (f_Q, f_Σ, f_Y)

$$f_Q : Q \rightarrow Q'$$

$$f_\Sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma'$$

$$f_Y : Y \rightarrow Y'$$

$$\begin{array}{ccccc} \Sigma \times Q & \xrightarrow{\delta} & Q & \xrightarrow{y} & Y \\ f_\Sigma \downarrow & f_Q \downarrow & \downarrow f_Q & & \downarrow f_Y \\ \Sigma' \times Q' & \xrightarrow{\delta'} & Q' & \xrightarrow{y'} & Y' \end{array}$$

Tais que:

$$\delta' (f_\Sigma(\sigma), f_Q(q)) = f_Q(\delta(\sigma, q))$$

$$f_Y(y(q)) = y'(f_Q(q))$$

$$f_Q(q_0) = q'_0$$

Obs. $\delta : \Sigma \times Q \rightarrow Q$

$y : Q \rightarrow Y$

Exemplos (Adámek et al, 2004)

WTA 2015

– Categoria Aut

Objetos: $A = (Q, \Sigma, Y, d, q_0, y)$

Morfismos: $f : A \rightarrow A'$

$f : (Q, \Sigma, Y, \delta, q_0, y) \rightarrow (Q', \Sigma', Y', \delta', q'_0, y')$

f é uma tripla (f_Q, f_Σ, f_Y)

Composição de morfismos:

$A \rightarrow A' \rightarrow A''$

$$\begin{array}{ccccc} \Sigma \times Q & \xrightarrow{\delta} & Q & \xrightarrow{y} & Y \\ f_\Sigma \downarrow & f_Q \downarrow & \downarrow f_Q & & \downarrow f_Y \\ \Sigma' \times Q' & \xrightarrow{\delta'} & Q' & \xrightarrow{y'} & Y' \end{array}$$

Exemplos (Adámek et al, 2004)

WTA 2015

– Categoria Aut

Objetos: $A = (Q, \Sigma, Y, d, q_0, y)$

Morfismos: $f : A \rightarrow A'$

$f : (Q, \Sigma, Y, \delta, q_0, y) \rightarrow (Q', \Sigma', Y', \delta', q'_0, y')$

f é uma tripla (f_Q, f_Σ, f_Y)

Composição de morfismos:

$A \rightarrow A' \rightarrow A''$

$$\begin{array}{ccccc}
 \Sigma \times Q & \xrightarrow{\delta} & Q & \xrightarrow{y} & Y \\
 f_\Sigma \downarrow & f_Q \downarrow & \downarrow & f_Q & \downarrow f_Y \\
 \Sigma' \times Q' & \xrightarrow{\delta'} & Q' & \xrightarrow{y'} & Y' \\
 g_\Sigma \downarrow & g_Q \downarrow & \downarrow & g_Q & \downarrow g_Y \\
 \Sigma'' \times Q'' & \xrightarrow{\delta''} & Q'' & \xrightarrow{y''} & Y''
 \end{array}$$

Exemplos (Adámek et al, 2004)

WTA 2015

– Categoria Aut

Objetos: $A = (Q, \Sigma, Y, d, q_0, y)$

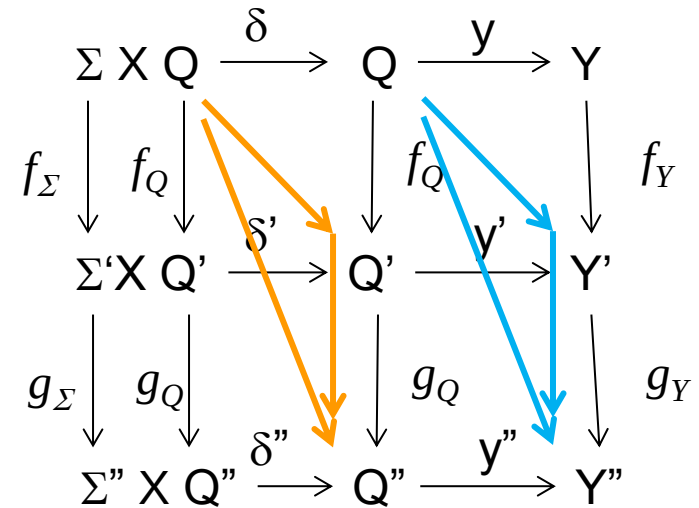
Morfismos: $f : A \rightarrow A'$

$f : (Q, \Sigma, Y, \delta, q_0, y) \rightarrow (Q', \Sigma', Y', \delta', q'_0, y')$

f é uma tripla (f_Q, f_Σ, f_Y)

Composição de morfismos:

$A \rightarrow A' \rightarrow A''$



Exemplos (Adámek et al, 2004)

WTA 2015

– Categoria Aut

Objetos: $A = (Q, \Sigma, Y, d, q_0, y)$

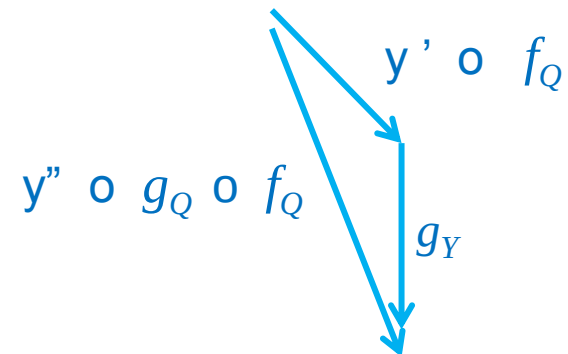
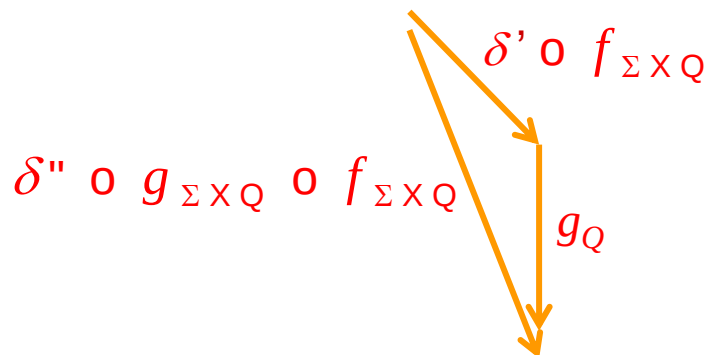
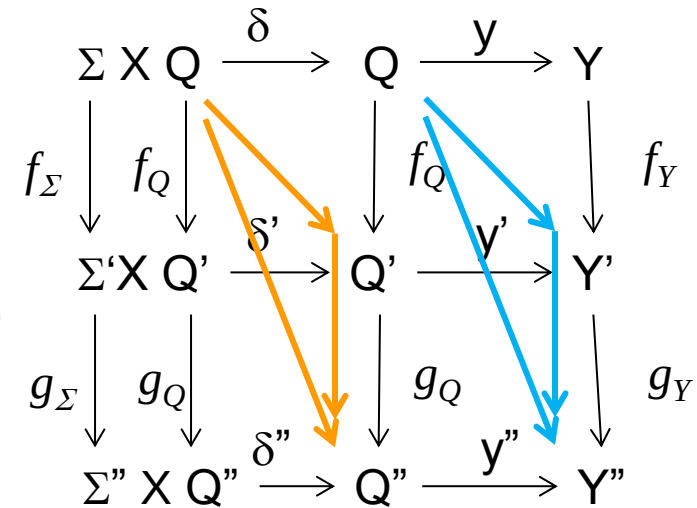
Morfismos: $f : A \rightarrow A'$

$f : (Q, \Sigma, Y, \delta, q_0, y) \rightarrow (Q', \Sigma', Y', \delta', q'_0, y')$

f é uma tripla (f_Q, f_Σ, f_Y)

Composição de morfismos:

$A \rightarrow A' \rightarrow A''$



Categorias de categorias

WTA 2015

- Categoria em que cada objeto é uma categoria
 - Nesse caso os morfismos entre dois objetos A e B (categorias A e B) passam a ser denominados funtores
 - Funtores têm estrutura mais complexa que morfismos em geral: $F : A \rightarrow B$
 - Mapeiam cada objeto de A em cada objeto de B
 - Mapeiam cada morfismo de A em cada morfismo de B
 - » Questão: dada a categoria A , domínio do funtor F , quais são os objetos de funtores correspondentes na categoria B , codomínio de F ?

Funtores

WTA 2015

- Funtores têm estrutura mais complexa que morfismos em geral:

$$F : A \rightarrow B$$

- Mapeiam cada objeto de A em cada objeto de B
- Mapeiam cada morfismo de A em cada morfismo de B

Categoria A



F

Categoria B

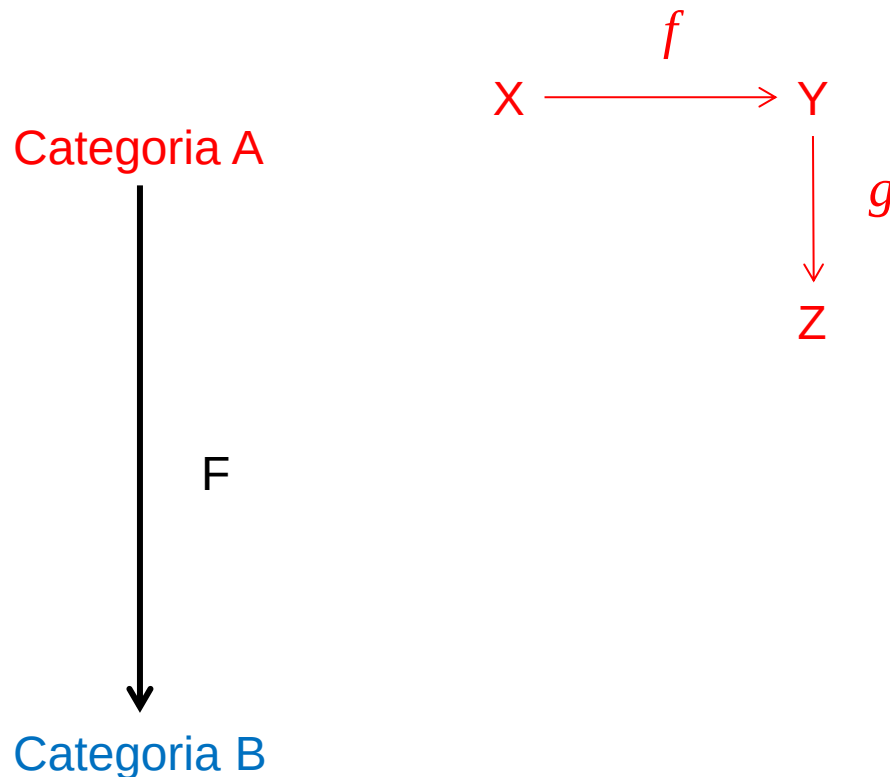
Funtores

WTA 2015

- Funtores têm estrutura mais complexa que morfismos em geral:

$$F : A \rightarrow B$$

- Mapeiam cada objeto de A em cada objeto de B
- Mapeiam cada morfismo de A em cada morfismo de B



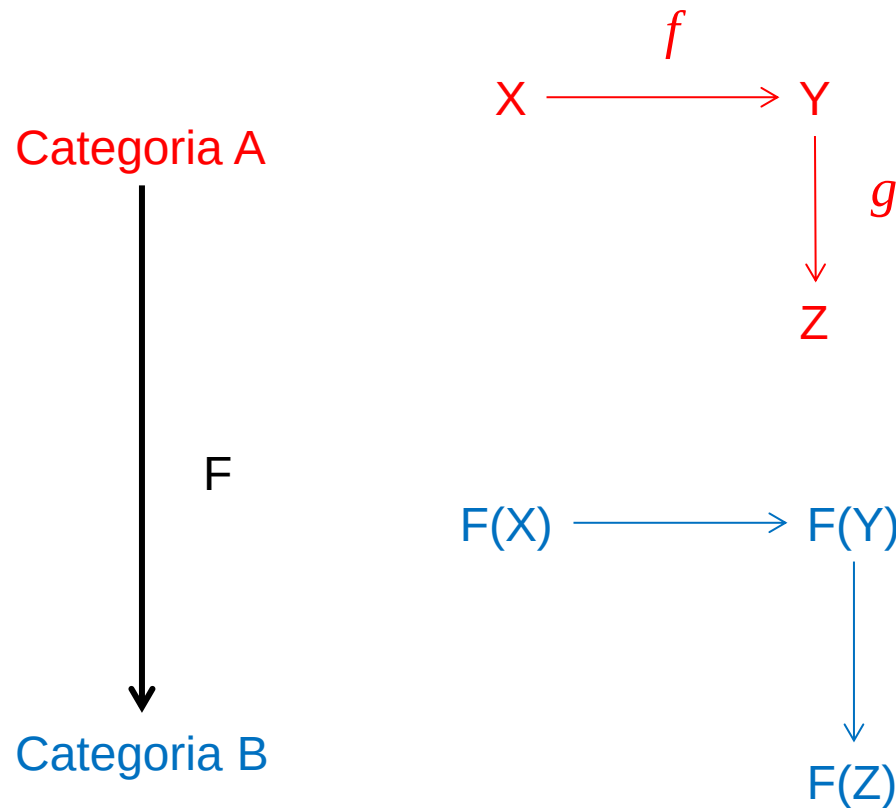
Funtores

WTA 2015

- Funtores têm estrutura mais complexa que morfismos em geral:

$$F : A \rightarrow B$$

- Mapeiam cada objeto de A em cada objeto de B
- Mapeiam cada morfismo de A em cada morfismo de B



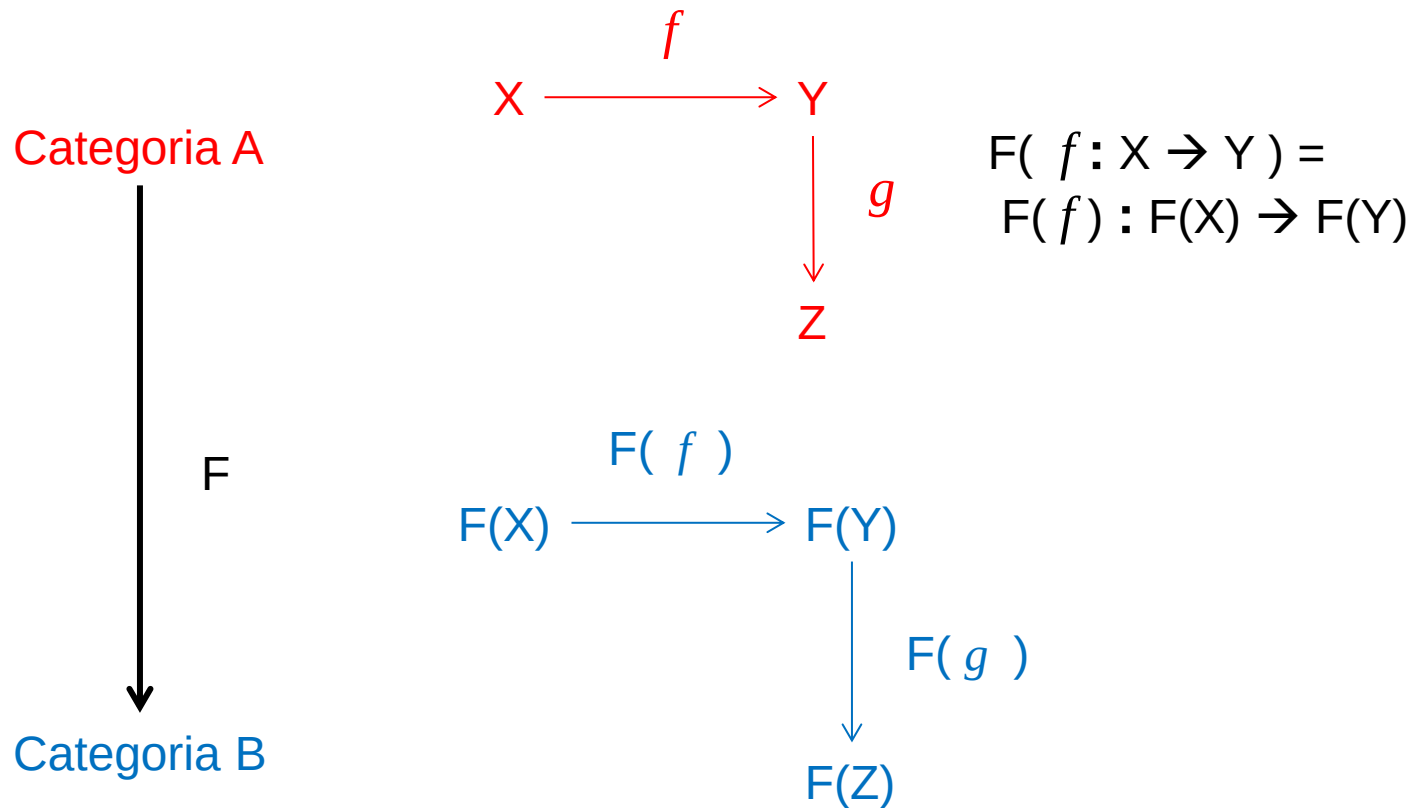
Funtores

WTA 2015

- Funtores têm estrutura mais complexa que morfismos em geral:

$$F : A \rightarrow B$$

- Mapeiam cada objeto de A em cada objeto de B
- Mapeiam cada morfismo de A em cada morfismo de B



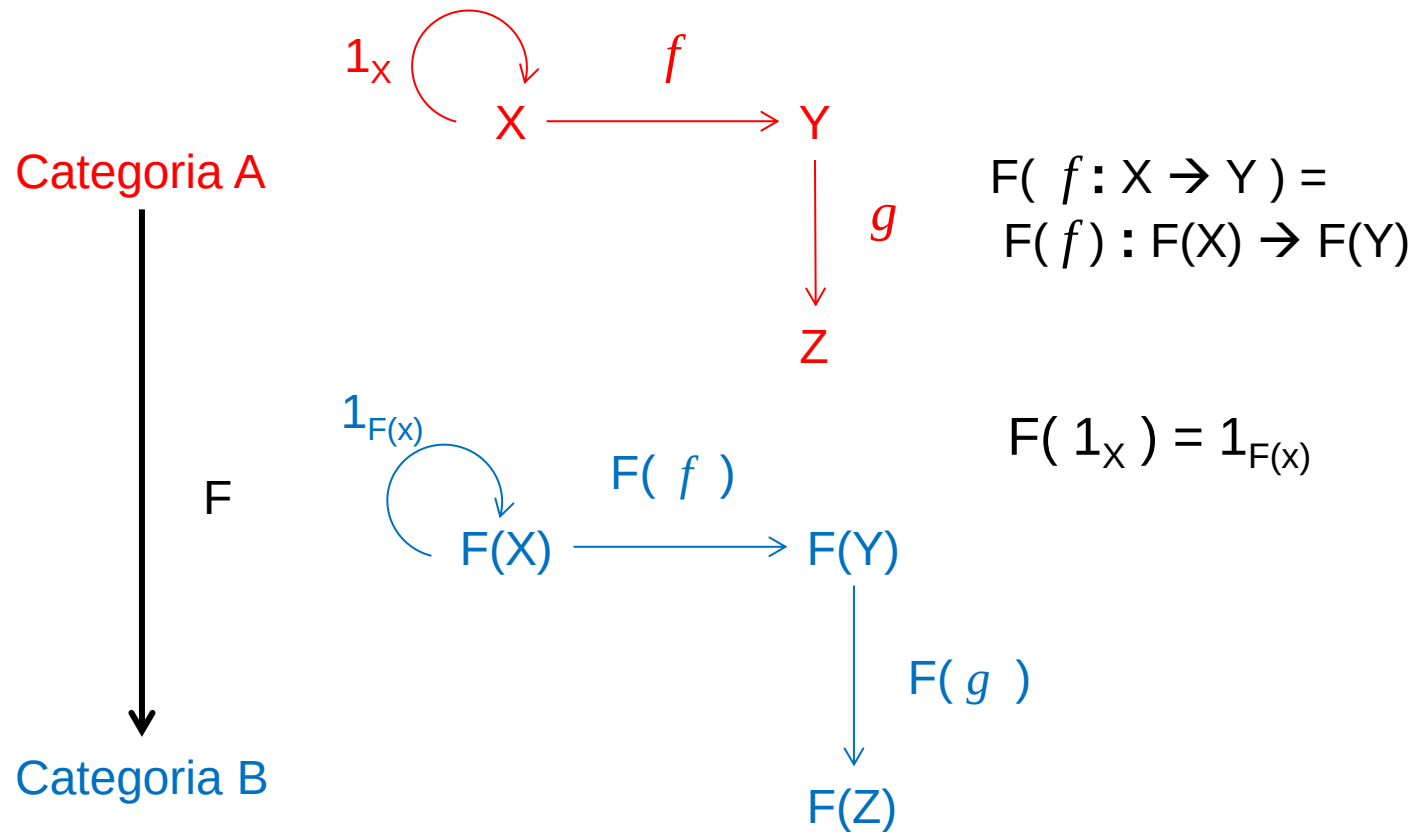
Funtores

WTA 2015

- Funtores têm estrutura mais complexa que morfismos em geral:

$$F : A \rightarrow B$$

- Mapeiam cada objeto de A em cada objeto de B
- Mapeiam cada morfismo de A em cada morfismo de B



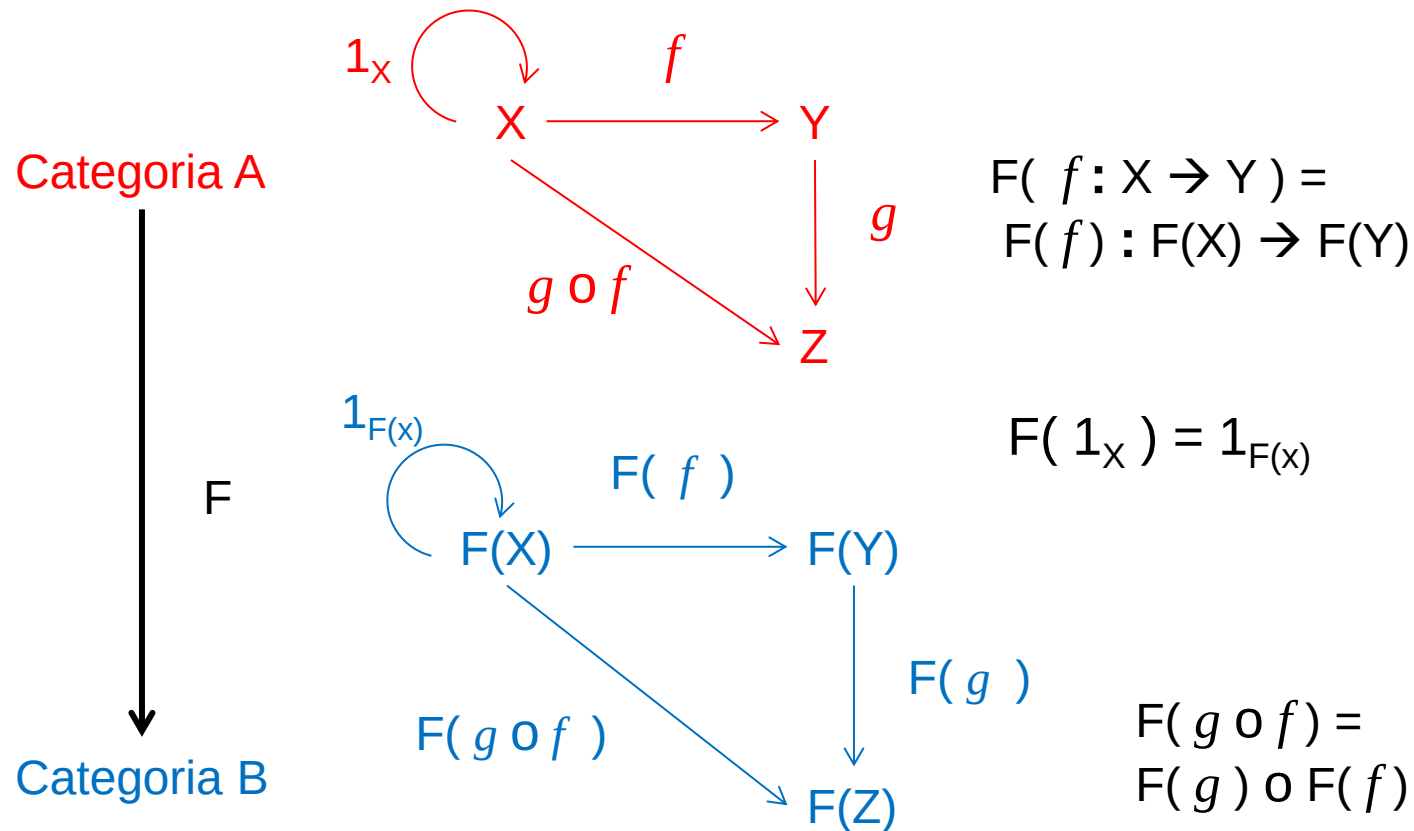
Funtores

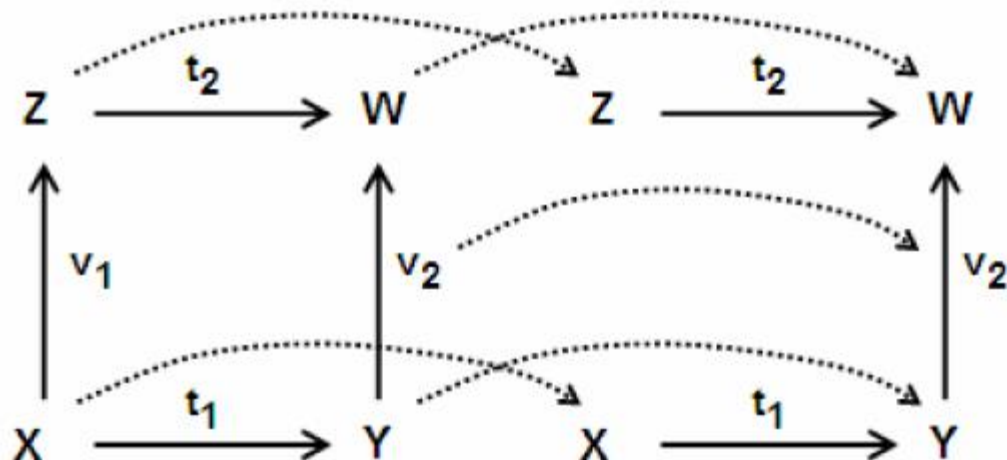
WTA 2015

- Funtores têm estrutura mais complexa que morfismos em geral:

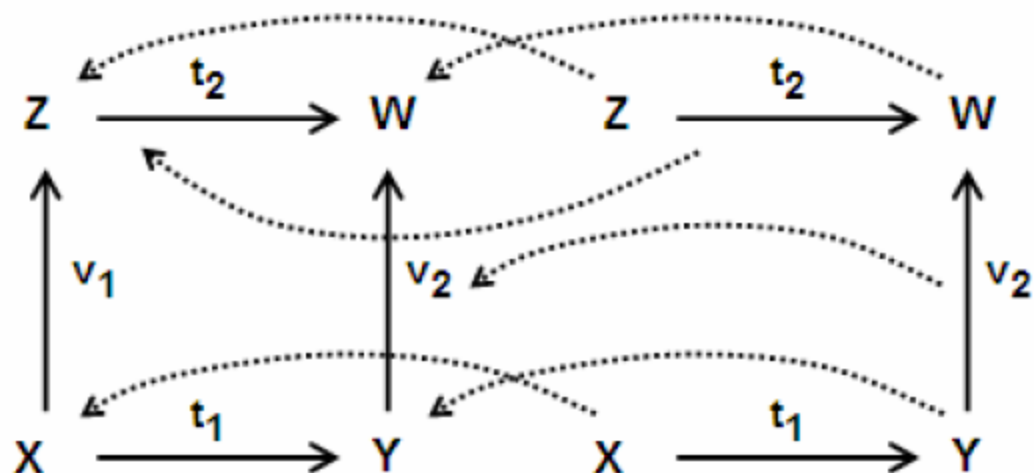
$$F : A \rightarrow B$$

- Mapeiam cada objeto de A em cada objeto de B
- Mapeiam cada morfismo de A em cada morfismo de B





Functor Esquecimento: Transforma uma categoria, removendo-lhe parte da estrutura.



Functor Livre: transforma uma categoria, adicionando nova estrutura.

Exemplo

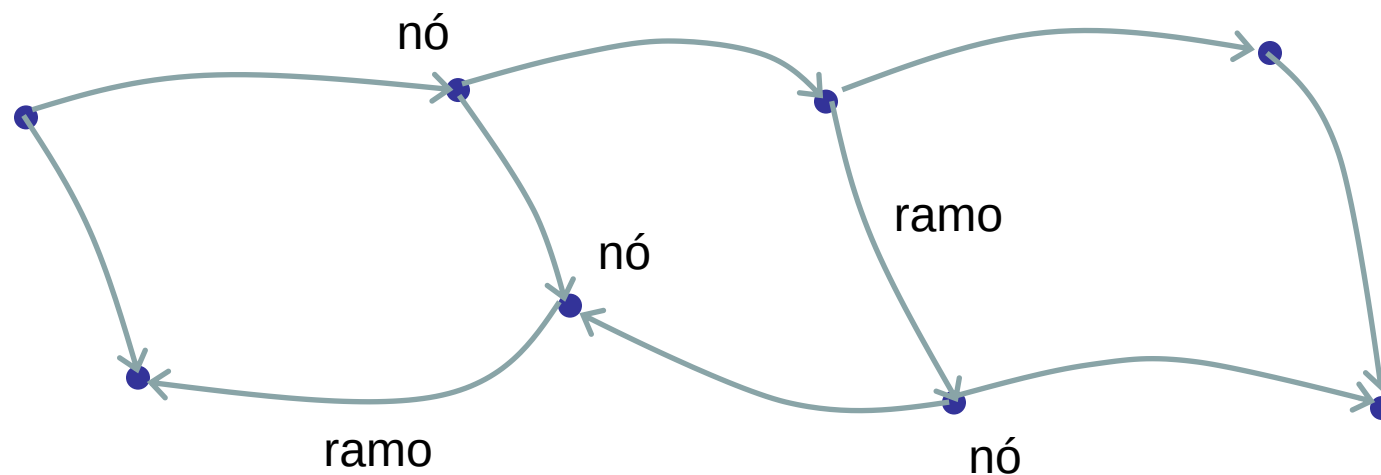
WTA 2015

- Categoria de circuitos ou redes
 - Circuitos ou redes contêm
 - Nós (ou vértices)
 - Ramos (ou arestas) entre os nós
 - Caminhos formados pela concatenação de ramos
 - Dois circuitos podem ser combinados para produzir um novo circuito
- É interessante que os circuitos sejam os morfismos dessa categoria
 - A combinação ou associação de dois circuitos seria vista como uma composição de morfismos
 - Então, quem são os objetos da categoria ?

Circuitos ou redes

WTA 2015

- Exemplo de circuito ou rede



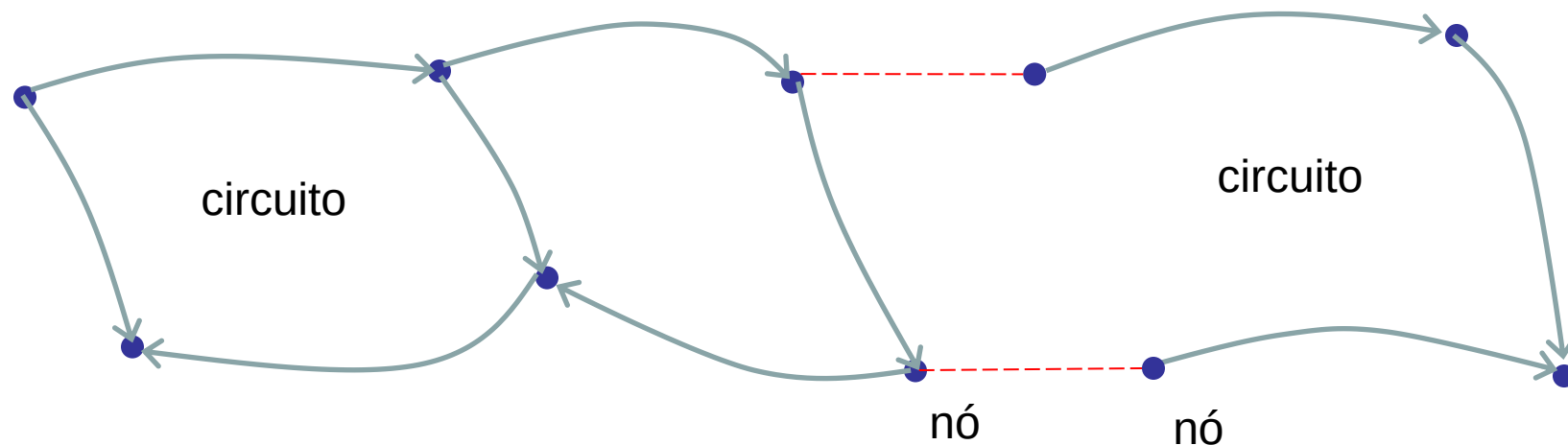
– Como se constrói o circuito ?

- Coloca-se um nó
- Liga-se o nó a outro nó através de um ramo

Circuitos ou redes

WTA 2015

- Exemplo de circuito ou rede



– Como se constrói o circuito ?

- Junta-se dois circuitos em um único, fazendo alguns nós coincidirem com nós do outro

Circuitos ou redes

WTA 2015

- Categoria Circ de circuitos (ou redes)
 - Objetos: são grafos (orientados e rotulados)
 - Morfismos: são “circuitos”
 - São mapeamentos de grafos em grafos
 - Nós: são grafos degenerados (sem arestas)
 - Os morfismos entre esses objetos (grafos) devem:
 - Levar nós a nós
 - Levar ramos a ramos
 - Preservar a estrutura dos objetos

Categoria Circ

WTA 2015

- Descrição dos objetos
 - São grafos orientados e rotulados
 - Orientados: nó origem (source s) e nó destino (target t)
 - Rótulo r
 - Os objetos são quintuplas $\Gamma = (E, N, s, t, r)$
 - E : conjunto de arestas, ou ramos
 - N : conjunto de nós
 - s : mapa de origens ($s: E \rightarrow N$)
 - t : mapa de destinos ($t: E \rightarrow N$)
 - r : mapa de rótulos ($r: E \rightarrow L$, L um conjunto de valores de rótulos, ou labels)



Categoria Circ

WTA 2015

- Descrição dos morfismos
 - Morfismo f entre os objetos Γ e Γ'

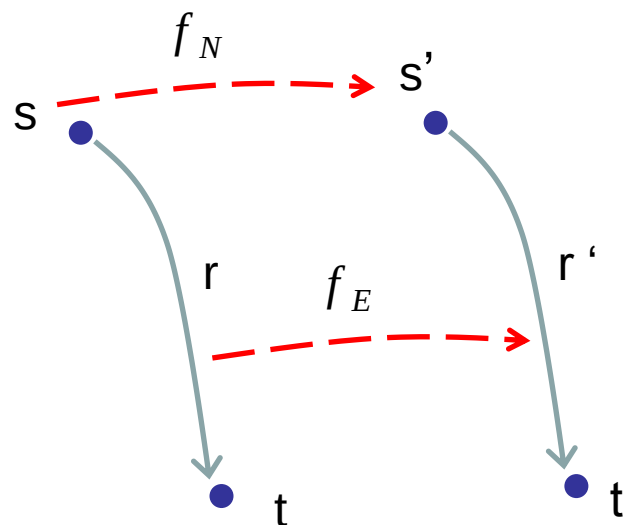
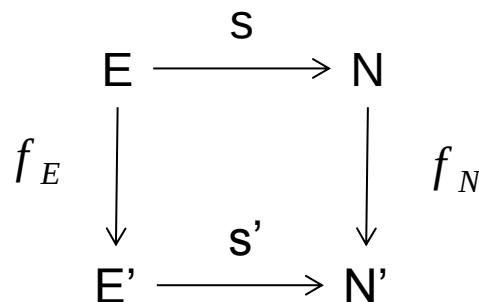
- $f : \Gamma \rightarrow \Gamma'$
- Corresponde à dupla (f_N, f_E)

$$- f_N : N \rightarrow N'$$

$$- f_E : E \rightarrow E'$$

- Tal que:

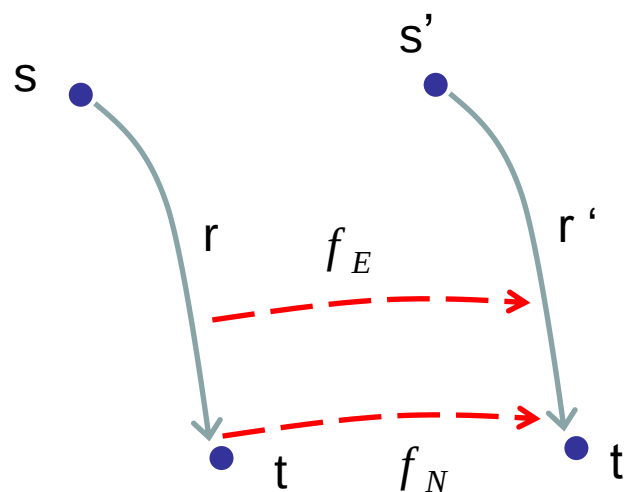
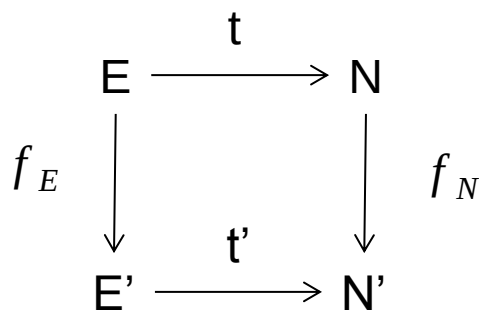
$$f_N(s(e)) = s'(f_N(e))$$



Categoria Circ

WTA 2015

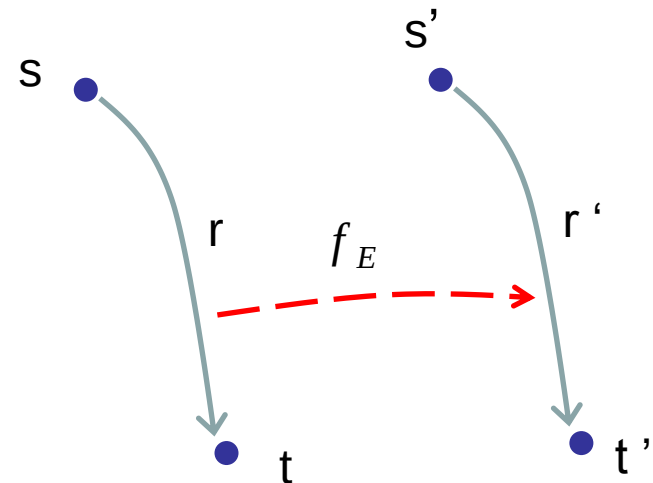
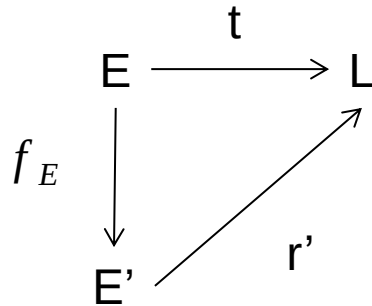
- Descrição dos morfismos
 - Morfismo f entre os objetos Γ e Γ'
 - Analogamente, para os destinos (targets):
 - $f_N(t(e)) = t'(f_N(e))$



Categoria Circ

WTA 2015

- Descrição dos morfismos
 - Morfismo f entre os objetos Γ e Γ'
 - E , para os rótulos (labels):
 - $r(e) = r'(f_E(e))$



- Estudo de generalizações → Bibliografia
 - Produtos e coprodutos
 - Limites e colimites, spans e cospans
 - Pullbacks e pushouts
- Aplicações a autômatos adaptativos
 - Construção da topologia → Circ
 - Comportamento adaptativo → Funtores sobre Circ

Bibliografia

WTA 2015

- Adámek, J. et al (2004) – Abstract and concrete categories, Dover
- Awodey, S. (2010) – Category theory – 2nd. ed. – Oxford
- Walters, R. (1991) – Categories and computer science - Cambridge
- Simmons, H. (2011) – An introduction to category theory – Cambridge
- Spivak, D. (2014) – Category theory for the sciences – MIT Press
- Crole, R. (1993) – Categories for types – Cambridge
- Lawvere & Schanuel (2009) – Conceptual mathematics – 2nd. Ed. - Cambridge
- Menezes & Haeusler (2001) – Teoria das categorias para ciência da computação – Ed. Sagra Luzato
- Arbib & Manes (1975) – Arrows, structures and functors – The categorical imperative – Academic Press
- MacLane S. (1971) – Categories for the working mathematician – Springer

Obrigado !

Perguntas ?

João Kogler
kogler@usp.br